

MÁSTER EN INVESTIGACIÓN Y EVALUACIÓN DIDÁCTICA EN EL AULA PARA EL DESARROLLO PROFESIONAL DOCENTE

**LAS DIFICULTADES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
ARITMÉTICOS DE DOS PASOS**



ALUMNA: MARÍA DEL CARMEN VALENZUELA MORENATE
ALMERÍA, JUNIO 2015

DIRECTOR: FRANCISCO GIL CUADRA
CODIRECTORA: ANA BELÉN MONTORO MEDINA
DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN
UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

AGRADECIMIENTOS:

Quisiera mostrar mi agradecimiento a:

Mi tutor y profesor D. Francisco Gil Cuadra, por su saber y por el gran apoyo que me ha brindado en todo el proceso del trabajo.

Gracias a él he podido llegar hasta el final de esta investigación, enseñándome y ayudándome en lo que he necesitado.

Mi cotutora D^a. Ana Belén Montoro Medina, sin ella el análisis de datos me habría resultado mucho más tedioso.

Mi profesor D. Antonio Frías Zorrilla, por ayudarme, orientarme y brindarme la posibilidad de haber tenido este año una formación complementaria al Máster que he cursado.

A los maestros y maestras del Colegio “Compañía de María” de Almería, que en todo momento me han recibido muy amablemente, en especial a Antonio y Maruja que han sido mis colaboradores en todo el proceso de la toma de datos, con una disposición incondicional y un trato inmejorable.

A los alumnos y alumnas participantes, sin ellos y ellas no habría investigación.

Mis agradecimientos también a toda mi familia que siempre están para ayudarme.

Este trabajo se lo dedico a mi marido y a mi hijo, que al fin y al cabo son los más incondicionales y sufridores de todos mis proyectos. Sin ellos nada sería ni igual, ni posible.

Gracias a todos y todas.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Justificación de la elección.....	3
1.2. Objetivos de la investigación	4
2. MARCO TEÓRICO.....	6
2.1. Problemas aritméticos y su clasificación general	6
2.2. Clasificación de PAEV	8
2.3. Esquemas en los problemas de un paso	13
2.4. Clasificación de problemas de dos pasos	13
2.5. Esquemas en los problemas de dos pasos	15
2.6. Noción de nodo	17
2.7. Definición de error en resolución de problemas	17
2.8. Tipos de errores en problemas aritméticos verbales simples	18
2.9. Tipos de errores en problemas aritméticos verbales de dos pasos	19
3. METODOLOGÍA	20
3.1. Marco metodológico	20
3.2. Tipo de investigación	21
3.3. Diseño de la investigación	22
3.3.1. Selección de las personas participantes.....	22
3.3.2. Ética en el estudio de casos.....	23
3.3.3. La negociación	24
3.3.4. Estrategias de recogida de información	26
3.4. El registro y el análisis de datos	38
3.5. La triangulación	39
4. RESULTADOS OBTENIDOS.....	40

5. CONCLUSIONES	62
6. BIBLIOGRAFÍA	65
7. ANEXOS	69
7.1. Cuestionarios abiertos de problemas.....	69
7.2. Tablas de recogida de aciertos y tipos de error por alumno o alumna, curso, grupo, tipo de cuestionario y problema.....	85
7.3. Tablas de frecuencia por tipo de error, cuestionario y problema, total de frecuencia de error por cuestionario y porcentaje	89
7.4. Modelo de solicitud de autorización para entrevistas grabadas	90
7.5. Entrevistas semiestructuradas de los participantes	91
7.6. Entrevistas semiestructuradas al docente	101

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo surgió de una Beca de Colaboración que he estado realizando durante este curso en el área de Matemáticas del Departamento de Educación de la Universidad de Almería.

Dentro del trabajo de esta beca estaba previsto tomar datos en un centro concertado en el que se había realizado anteriormente un estudio exploratorio sobre resolución de problemas aritméticos verbales de dos pasos. Dicho estudio exploratorio se centró en analizar las dificultades de los problemas según la influencia del número de conexiones o nodos y otras variables. Pero además de él se realizaron aportaciones sobre tipos de errores que no estaban estudiados y que se habían detectado solamente para los problemas aritméticos de dos pasos (Castro y Frías, 2012). Pero este trabajo, por su diseño, no permitía extraer conclusiones sobre los errores; cada estudiante había contestado solo un problema de cada tipo, con lo que no era posible ver si se repetía el error o si seguía algún patrón.

En base a estos errores y los ya presentados para problemas tanto de un paso como de dos pasos. Además, del hecho de que no hay investigaciones que realmente aborden los errores de los problemas aritméticos desde la perspectiva de las dificultades que afronta el alumnado cuando los resuelve. Se vio conveniente el realizar un estudio de caso que abordará dicha perspectiva.

Para ello, mi trabajo comenzó con una reelaboración profunda de los cuestionarios de problemas usados en el estudio exploratorio previo. En ella se modificaron los problemas que formaban parte de cada cuestionario tipo, anteriormente se presentaba un problema de cada tipo en cada cuestionario. En los cuestionarios utilizados en la actualidad se busca que los problemas de cada cuestionario sean similares en cuanto a las variables para poder localizar patrones de resolución el alumnado. Además se han variado los nombres de los poseedores, las cantidades, las unidades usadas, ya que nos encontramos con la situación de

tener en el enunciado de un problema la solución al siguiente problema de los planteados en los cuestionarios actuales.

Dichos cuestionarios se pasaron a un total 142 alumnos y alumnas. Justo después se procedió a su corrección y catalogación según el tipo de error. Esta organización nos permitió seleccionar a varios alumnos o alumnas para cada tipo de error. Así, se mandaron las pertinentes autorizaciones para el alumnado que pretendíamos entrevistar y grabar en video. Una vez que se dispuso de las autorizaciones pertinentes se entrevistó un total de 15 alumnos y un docente, de los que se obtuvo la información necesaria para responder a los objetivos de la investigación.

Finalmente, para este trabajo fin de máster no hubo más remedio que limitar el estudio a tres de los alumnos entrevistados para poder centrar de manera adecuada este trabajo y por limitaciones tanto de espacio como de tiempo. No obstante, se pretende seguir con dicho análisis y aportarlo si es posible en el futuro a través de un publicación.

El trabajo queda estructurado en cuatro partes. La primera en la que se hace una introducción en la que se justifica la elección del tema de interés así como los objetivos de la investigación.

En la segunda parte se recoge el marco teórico, que es una visión teórica del enfoque desde el que se realiza la investigación. En esta parte se define lo que entendemos por problema aritméticos, así como una clasificación general. Para posteriormente explicar las clasificaciones de los Problemas Aritméticos de Enunciado Verbal (PAEV) y sus esquemas ya que se han considerando imprescindibles para que cualquier lector pueda llegar a comprender las clasificaciones y los esquemas de los problemas aritméticos de dos pasos. También tratamos el concepto de nodo y de ahí pasamos a los distintos errores tanto de problemas de un paso como de dos pasos.

En la tercera parte se recoge todo el marco metodológico de la investigación. En él se describe el tipo de investigación y todo su diseño, pasando por la selección de las personas participantes, la ética en el estudio de casos, la negociación, las estrategias de recogida de información, así como el análisis de datos y la triangulación que requiere un estudio de casos.

La cuarta parte recoge los resultados obtenidos de la investigación, que se hacen de forma detallada para cada uno de los tres alumnos analizados de los 15 entrevistados para otros tipos de errores, que en este estudio no se contemplan dada la limitación.

Se concluye el presente trabajo con las referencias bibliográficas citadas y los anexos que sin duda creemos que aportan información complementaria y credibilidad al informe y que no puede ser recogida en él.

Entre las conclusiones de la investigación encontramos dos patrones de comportamiento claramente diferenciados y que responden a las dificultades que supera el alumnado cuando resuelve problemas aritméticos de dos pasos. Dichos patrones se producen por la falta de comprensión de expresiones comparativas que se utilizan en los enunciados de los problemas.

1.1. Justificación de la elección

Existen en el campo de la didáctica de la Matemática una gran cantidad de investigaciones sobre problemas aritméticos de enunciado verbal. Principalmente está centrada en los problemas de un paso o de dos pasos pero considerados como una característica más del problema. En la presente, se ha considerado que el hecho de que sean problemas aritméticos de dos pasos es una característica fundamental de estos problemas y es en este enfoque en el que el campo de investigación no se encuentra suficientemente desarrollado (Frías y Castro, 2007a).

Se planteó la investigación sobre los errores que el alumnado comete en la resolución de los problemas aritméticos de dos pasos, ya que además de ser escasa la investigación al respecto, es fundamental su conocimiento para el docente. Proporcionan información sobre la forma en la que los alumnos interpretan los problemas y utilizan los diferentes procedimientos para alcanzar una buena meta (Moreno, 1998). El análisis de las dificultades, errores y obstáculos que el alumnado encuentra en la resolución de dichos problemas aritméticos indica cuestiones claves que hay que tener en cuenta en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En el diseño de las tareas que el docente les plantee puede controlar que los distintos caminos de solución de un mismo problema supongan el poner en juego las capacidades que involucren dichas dificultades (Gómez y Lupiáñez, 2007). De tal forma que el alumnado sea puesto en la necesidad de superar y afrontar dichas situaciones de dificultad.

Como dice Moreno (1998):

El análisis de los errores tiene un doble interés: de una parte sirve para ayudar a los profesores a organizar estrategias generales y específicas para conducir mejor la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y de otra, contribuye a una mejor preparación de estrategias de corrección de los mismos (p.60)

1.2. Objetivos de la investigación

Inicialmente, el planteamiento de la investigación fue conocer las causas que llevan al alumnado a cometer errores en la resolución de problemas aritméticos verbales de dos pasos. Se trataba de un objetivo muy amplio. En diversas publicaciones se realizan distintas clasificaciones de los errores que el alumnado comete en la resolución de problemas aritméticos. Mi estudio se centra en las clasificaciones que atienden a la componente semántica de dichos problemas además de otras variables que se consideraron en los estudios previos como son

las estructuras, aditiva o multiplicativa, las relaciones de aumento o disminución, el número de nodos. Atendiendo a dicha componente semántica, encontramos por una parte una clasificación de errores para problemas aritméticos verbales de un paso que son comunes también para problemas aritméticos verbales de dos pasos, que son: sin respuesta, cambio de estructura, mezcla de estructura, inversión de la relación y otros errores (Castro, 1995). Además, de los errores nombrados anteriormente, se detectaron como novedosos en el estudio exploratorio para problemas aritméticos verbales de dos pasos: el error de datos ordenados, repetir el mismo dato en las dos operaciones cuando sólo debe usarse en una de las operaciones, error de realizar una operación y otros (Castro y Frías, 2012).

Posteriormente, durante el transcurso de la toma de datos que se realizó para la beca de colaboración, se replanteó la investigación decidiendo reducir el estudio actual a un tipo de error. El error elegido fue el que Castro (1995) denomina como mezcla de estructura, ya que fue con el que había posibilidad de realizar una toma de datos más completa durante el tiempo que se me permitía el acceso al centro elegido para la investigación.

De esta concreción surgió la pregunta principal de mi investigación:

- ¿Cuáles son las causas de los errores de mezcla de estructura que comete el alumnado de 5º y 6º de Educación Primaria en la resolución de problemas aritméticos verbales de dos pasos?

Para dar respuesta a esta pregunta, concretada en el caso que se estudió, surgieron otras preguntas más específicas que nos llevarían a poder responder la pregunta general inicialmente enunciada.

- ¿Qué expresiones llevan al alumnado a realizar las operaciones mediante las que resuelven problemas aritméticos verbales de dos pasos cuando comente un error de mezcla de estructura?

- ¿Qué razonamiento es el que realiza en la resolución de este tipo de problemas?

Por tanto, el objetivo general de la investigación es:

- Explorar las causas de los errores de mezcla de estructura en los problemas de dos pasos con uno o dos nodos.

2. MARCO TEÓRICO

En este punto hacemos una revisión bibliográfica relacionada con el tema sobre el que versa la investigación. Partiremos de la definición de problema, pasando a los problemas simples y compuestos para llegar a los problemas aritméticos verbales. Trataremos sus clasificaciones y finalmente para concretar en el foco de estudio de los errores, realizaremos una revisión de los errores cometidos por el alumnado en este tipo de problemas. Tanto de problemas de un paso o dos pasos, como los errores exclusivos de los problemas aritméticos de dos pasos.

2.1. Problemas aritméticos y su clasificación general

Para Parra (citado en Coronel y Curotto, 2008):

un problema lo es en la medida en que el sujeto al que se le plantea dispone de los elementos para comprender la situación que el problema describe y no dispone de un sistema de respuestas totalmente constituido que le permita responder de manera inmediata (p.464).

En la misma línea, otros autores como Brun (citado en Lise, 2015) considera un problema como una situación inicial con un objetivo a lograr, que requiere de unas acciones u operaciones por parte del sujeto para poder llegar a ese objetivo.

Además, el objetivo no puede ser alcanzado de golpe. Así, un problema puede serlo para un sujeto y no para otro, dependerá del desarrollo intelectual de cada sujeto.

Por tanto, un problema es considerado como tal sólo para aquellas personas que quieren resolverlo y no dispone de la solución de manera inmediata (Krulik y Rudnik, 1980, citado en López, 2001; Newell y Simon, 1972, citado en López, 2001; Polya, 1965; Schoenfeld, 1996, citado en López 2001).

Los problemas en los que la información viene dada con un texto que consta de una o varias frases se les llama problemas de expresión o formato verbal. Concretando a los problemas aritméticos en los que se facilita un enunciado verbal se les llama problemas aritméticos verbales (PAEV) (Castro, Rico y Gil, 1992).

Otra distinción que se realiza es entre los problemas aritméticos simples y compuestos, según el número de relaciones, explícitas o implícitas que se desprenden de la información facilitada por el enunciado del problema (Frías y Castro, 2007a).

Los problemas aritméticos simples o de un paso son aquellos que sólo contienen una relación entre dos datos numéricos con los que el resolutor tendrá que operar una sola vez para lograr la solución, mediante la realización de una adición, sustracción, multiplicación o división (Castro, Castro, Rico, Gutiérrez, Tortosa, Segovia, González, Morcillo y Fernández, 1998).

Los problemas aritméticos compuestos o de más de un paso son aquellos en los que para resolverlos es necesario utilizar más de una operación o una misma operación más de una vez (Frías y Castro, 2007a).

El número de pasos de un problema compuesto o de más de un paso dependerá del número de relaciones entre cantidades (Castro y otros, 1998) y por

tanto los problemas de dos pasos son aquellos que requieren para su resolución de la ejecución de dos operaciones combinadas, que constituyen un caso particular de los problemas compuestos. En ellos, la traducción del texto a las operaciones aritméticas requiere encontrar las relaciones entre las cantidades a través de un trabajo previo con el enunciado del problema (Frías y Castro, 2007a).

Nuestro trabajo lo vamos a centrar en este último de tipo de problemas que son los problemas de dos pasos. No obstante, se hace necesario aclarar a través de la clasificación de los problemas aritméticos de un paso que criterios de clasificación vamos a tener en consideración de los problemas de dos pasos en esta investigación.

2.2. Clasificación de PAEV

La clasificación que vamos a seguir para los PAEV de una etapa, los divide originalmente en dos tipos, los problemas de estructura aditiva y los de estructura multiplicativa. De esta manera, se agrupan por una parte los problemas de sumar y restar y por otra parte los problemas de multiplicar o dividir.

En los primeros, la categorización más aceptada se ha realizado según las variables:

- Estructura semántica: combinación, cambio, comparación e igualación.
- Tipo de relación entre los datos: aumento o disminución.
- Posición de la cantidad desconocida (Rico, González, Gutiérrez, Castro, Tortosa, Castro, Fernández, Morcillo y Pérez, en prensa)

En los problemas de estructura aditiva, existe bastante consenso en la manera de clasificarlos en función de las categorías semánticas por distintos autores como problemas de combinación, de cambio y de comparación, establecido

originalmente por Heller y Geeno (citado en Robayna, Domínguez y Herrera, 1998). Además, existe la categoría de Igualación introducida por Carpenter y Moser (1983), en la que no hay tanto consenso entre los distintos autores, unos la consideran como una tipología de problemas híbridos entre los problemas de cambio y de comparación y otros la consideran como categoría independiente (Martínez y Aguilar, 1996).

Los problemas de combinación disponen de dos cantidades que se consideran la partes de un todo. Se refieren a situaciones estáticas. En ellos se puede preguntar tanto por alguna de las partes como por el todo. En esta tipología de problemas encontramos dos variables, una cuando se pregunta por una parte y otra cuando se pregunta por el todo (Benítez, 1994).

Un ejemplo sería: En un jardín hay 15 flores amarillas y 18 flores blancas. ¿Cuántas flores hay en total?

En este problema podemos ver como el todo son las flores que hay en el jardín. Como datos se nos dan dos números que son las cantidades de flores blancas y amarillas. En este caso se nos pregunta por el total. Otra posibilidad sería que nos dieran una de las partes y el total y nos preguntaran por la otra parte.

Los problemas de cambio están referidos a situaciones dinámicas en las que se lleva a cabo una acción. En ellos se da una situación inicial sobre la que se aplica una acción para concluir en un estado final (Bermejo y Rodríguez, 1991). Son problemas en los que se pueden dar acciones de aumento o de disminución de la cantidad inicial en el transcurso de la acción.

Un ejemplo sería: Ana tiene 20 cromos. Durante una partida de juego con su amiga gana a ésta 8 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Ana después de la partida?

Se trata de un problema de cambio en el que disponemos de dos datos y una incógnita. En este caso los datos son la cantidad poseída inicialmente por Ana, en

un estado inicial y la cantidad de cambio que se produce por la acción. La incógnita es el estado final.

Los problemas de comparación se caracterizan porque en ellos se establece una relación de comparación entre dos cantidades, en unos casos para determinar la diferencia entre ellas y en otros para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia. Son problemas estáticos. Hay tres tipos en función de que la incógnita sea la diferencia, la cantidad comparada o la cantidad referente. Además, por cada tipo se distinguen dos relaciones en función de la expresión de comparación “más que” o “menos que” (Benítez, 1994).

Un ejemplo sería: Laura tiene 15 años. Su hermano Luís tiene 6 años. ¿Cuántos años tiene Laura más que Luís?

Se trata de un problema de comparación aditiva, en el que conocemos dos datos que son: 15 años que es la edad del comparado, 6 años que es la edad del referente y se nos pregunta por la incógnita que es la diferencia o relación entre referente y comparado.

Los problemas de igualación son una mezcla entre los problemas de cambio y los problemas de comparación. En ellos se establece una relación comparativa entre dos cantidades en las que tiene que ocurrir una acción que no tiene porqué ser explícita y que se tiene que dar con la finalidad de que las dos cantidades queden igualadas (Benítez, 1994).

Un ejemplo sería: En una clase se han creado dos grupos de trabajo. En el grupo A hay 15 componentes y el grupo B hay 23. ¿Cuántas personas deben incorporarse al grupo A para que ambos grupos tengan el mismo número de componentes?

Como vemos se trata de un problema en el que se establece una relación comparativa entre los componentes de dos grupos de trabajo. Partimos

conociendo la composición inicial de cada uno de los grupos y se nos pregunta por la cantidad de cambio que tendría que incorporarse al grupo A para que ambos grupos tengan la misma cantidad de componentes.

A continuación, a modo de referencia se recoge una tabla de equivalencias entre las categorías semánticas de los problemas de estructura aditiva que realizan distintos autores.

Categorías de Problemas	Características	Equivalencias entre las categorías de distintos autores
<i>COMBINACIÓN</i>	Relaciones estáticas entre conjuntos	<p>*Combinación: Greeno (1980); Heller y Greeno (1978); Riley (1979); Riley y cols. (1981).</p> <p>*Parte-Parte-Todo: Carpenter y Moser (1981); Carpenter y cols. (1981).</p> <p>*Estática: Nesher (1978, 1981).</p> <p>*Composición de dos medidas: Vergnaud y Durand (1976); Vergnaud (1981).</p>
<i>CAMBIO</i>	De un estado inicial aumenta o disminuye a un estado final	<p>*Cambio: Greeno (1980).</p> <p>*Unión y separación: Carpenter y Moser (1981); Carpenter y cols. (1981).</p> <p>*Dinámica: Nesher y Katriel (1978); Nesher (1981).</p> <p>*Transformación operando con dos medidas: Vergnaud y Durand (1976); Vergnaud (1981).</p>
<i>COMPARACIÓN</i>	Relaciones de comparación entre dos conjuntos	<p>*Comparación: Greeno (1980); Carpenter y Moser (1981); Carpenter y cols. (1981); Nesher y Katriel (1978); Nesher (1981).</p> <p>*Conexión estática operando sobre dos medidas: Vergnaud y Durand (1976); Vergnaud (1981).</p>

Tabla 1. (Obtenida de Nesher, Greeno y Riley citado en Benitez, 1994, p.54)

En cuanto a los problemas de estructura multiplicativa de un paso, no hay tanto acuerdo en el modo de clasificarlos y existen varios enfoques dados por diferentes autores. Las clasificaciones más divulgadas son las que en su día aportaron Vergnaud (1983, 1988), la de Schwartz (1981, 1988) y la de Nesher (1988) (citados en Castro, 1995).

Las distintas clasificaciones que realizan estos autores son las siguientes:

CLASIFICACIONES DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA		
Vergnaud	Schwartz	Nesher
Isomorfismo de medidas	$I \times E = E'$	Regla de correspondencia (Mapping rule)
		Comparación multiplicativa
Producto de medidas	$E \times E' = E''$	Producto cartesiano

Tabla 2. (Obtenida de Castro, 1995)

Dado que no existe tanto acuerdo en la clasificación de los problemas de estructura multiplicativa y nuestro estudio se va a centrar en problemas de dos pasos en los que únicamente se van a presentar problemas dentro del grupo que Nesher (1988) denomina como comparación multiplicativa, son estos los que únicamente vamos a explicar de forma más detallada.

Los problemas de comparación multiplicativa son problemas estáticos en el tiempo, al igual que los de comparación aditiva. Se resuelven con una multiplicación o división, aunque también se puedan resolver con una suma o resta reiterada que es lo que engloba el concepto de multiplicación o división. En ellos, se nos presenta un elemento referente y un elemento comparado que se relacionan a través de una expresión de comparación como puede ser “tantas veces más” o “tantas veces menos” (Castro, 1995).

Un ejemplo sería: Juan tiene 15 euros. María tiene tres veces más euros que Juan. ¿Cuántos euros tiene María?

Se trata de un problema de comparación multiplicativa en el que disponemos de dos datos y una incógnita. En este caso, los datos son la cantidad poseída por el referente que es Juan. Además, conocemos la correspondencia (tres veces más) entre el referente, Juan, y la comparada, María, que es la incógnita del problema.

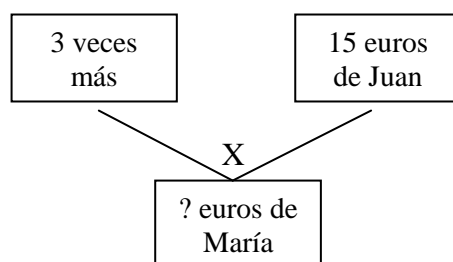
2.3. Esquemas en los problemas de un paso

Para Nesher y HersHKovitz (1994) en los problemas de un paso se presentan dos componentes completas, que son los datos que proporciona el enunciado del problema, y una componente que es la cantidad que responde a la pregunta del problema. Según esta concepción la relación de un problema de un paso se puede representar mediante un esquema que Nesher y HersHKovitz adaptan simplificándolo de la notación gráfica de Shalin y Bee (1985) (citado en Frías y Castro, 2007b). Dicho esquema recoge tres cantidades que se encuentran relacionadas por una estructura aditiva o multiplicativa.

Cada esquema consta de dos partes y un todo, que son los sumandos y la suma de una estructura aditiva o bien los factores y el producto de una estructura multiplicativa.

Dicho esquema es representado como sigue:

Ejemplo: Juan tiene 15 euros. María tiene tres veces más euros que Juan.
¿Cuántos euros tiene María?



2.4. Clasificación de problemas de dos pasos

Según Frías y Castro (2007a) existen distintos enfoques de investigación sobre problemas aritméticos verbales de más de un paso que se han concretado en:

- los estudios pioneros de la primera mitad del siglo XX
- el método de análisis-síntesis

- el enfoque semántico, con dos perspectivas:
 - el análisis proposicional
 - las categorías semánticas.

A continuación, vamos a desarrollar en qué consiste el enfoque basado en las categorías semánticas que será referente para nuestra investigación.

En el enfoque de las categorías semánticas lo que se analiza es el problema compuesto poniendo la mirada en la estructura semántica de cada de las proposiciones del problema compuesto Carpenter y Moser (1983).

Por ejemplo: Laura tiene 15 canicas y su hermano tiene tres veces más que ella. ¿Cuántas canicas tienen entre los dos?

En este problema encontramos una primera relación con estructura multiplicativa en la que se establece una relación comparativa entre las canicas que tienen Laura y su hermano. En la primera proposición conocemos tanto el referente que son las canicas que tiene Laura como la relación entre el referente y el comparado. Se nos pregunta de forma implícita por el comparado, que son las canicas que tiene el hermano de Laura. En la segunda relación, nos encontramos con una estructura aditiva de combinación en la que se entiende como el todo las canicas que tienen entre los dos hermanos y es la incógnita del problema. Dicha incógnita del problema será determinada a partir de las 15 canicas que tiene Laura y un dato implícito que corresponde al valor calculado tras solucionar la primera proposición del problema y que es la componente latente del problema (las canicas que posee el hermano de Laura).

Dentro de este enfoque que ha sido seguido en los estudios realizados por Frías y Castro (2004, 2007b, 2012) se han tenido en cuenta, además, de la estructura semántica de las dos relaciones de los problemas de dos pasos, las relaciones de aumento y disminución (Frías y Castro, 2007a) y el orden de las relaciones que se establecen en el enunciado del problema (Castro y otros, 1998).

Respecto a la estructura semántica, podríamos encontrar problemas con una o dos de las relaciones de estructura aditiva de cualquiera de los tipos de las categorías de problemas aditivos de un paso (combinación, cambio, comparación e igualación) y en el caso de las estructuras multiplicativas también con la designación de las categorías de estructura multiplicativa de un paso. En nuestro caso se limitan las estructuras aditivas a las categorías de combinación y comparación y las estructuras multiplicativas a la categoría de comparación.

En cuanto a las relaciones de aumento y disminución, al tratarse de problemas de dos pasos, se pueden dar las siguientes posibilidades:

- Las dos relaciones de aumento, que son considerados como problemas de aumento-aumento.
- La primera relación de aumento y la segunda de disminución, que se designan como aumento-disminución.
- La primera relación de disminución y la segunda de aumento, que se designan como disminución-aumento.
- Las dos relaciones de disminución, que se designan como disminución-disminución.

El orden de las operaciones del problema que se designa, por ejemplo, para un problema con una primera proposición de estructura aditiva seguida de una estructura multiplicativa como (+, x).

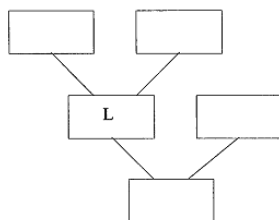
2.5. Esquemas en los problemas de dos pasos

Los esquemas anteriormente introducidos para los problemas simples pueden ser utilizados para los problemas de dos pasos. Según Nesher y HersHKovitz (1991, 1994) (citado en Frías & Castro, 2007b, p. 2) “la combinación de dos estructuras da lugar a esquemas de problemas de dos pasos”. De esta manera, al

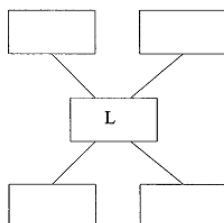
unir la estructura de cada una de las dos proposiciones de un problemas de dos pasos se obtiene un esquema compuesto unido por la componente latente (Frías y Castro, 2007b).

Según Shalin y Bee (1985) se obtienen tres posibles esquemas para los problemas de dos pasos:

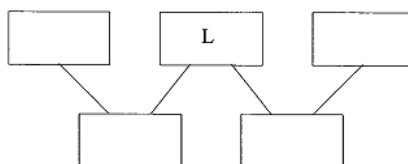
1.- Esquema jerárquico: Cuando los esquemas simples de cada una de las proposiciones del problema de dos pasos se unen por compartir uno el todo y el otro una de las partes.



2.- Esquema de compartir el todo: Cuando los esquemas simples de cada una de las proposiciones del problema de dos pasos se unen al compartir el todo.



3.- Esquema de compartir una parte: Se da cuando los esquemas simples de cada una de las proposiciones del problema de dos pasos se unen al compartir una parte.



En los tres esquemas anteriores encontramos tres componentes que corresponden a datos del problema, una componente latente implícita que corresponde al nexo de unión entre los dos esquemas simples y una componente

desconocida que corresponde al dato que hay que hallar en el proceso de resolución del problema y por el que se pregunta de forma explícita.

2.6. Noción de nodo

En los esquemas de los problemas de dos pasos hemos visto que se comparte una componente latente que es común a los dos esquemas simples que lo conforman, dicha situación es denominada como nexo o nodo (Frías y Castro, 2007b).

No obstante, la definición de nodo no implica que la única posibilidad sea ser la componente latente de la estructura de los problemas de dos pasos, sino que “el nodo también puede ser un dato explícito en el enunciado, que es compartido por más de una estructura simple dentro de un problema compuesto” (Frías y Castro, 2007b, p. 3).

Por tanto, en los problemas de dos pasos con dos nodos nos encontramos que el enunciado nos presenta dos datos conocidos que son utilizados en las dos estructuras simples que componen la estructura del problema compuesto, una componente latente que será el nexo o nodo de unión entre los dos esquemas simples y que nunca será un dato conocido del problema y una incógnita por la que el problema pregunta.

Debido a ello, Frías y Castro (2007b) proponen otros tipos de esquemas para los problemas de dos pasos con dos nodos que no vamos a exponer aquí, dado que no son objeto de nuestra investigación.

2.7. Definición de error en resolución de problemas

- Rauff (citado en Escudero, 2007, p. 14) “considera que los errores e ideas equivocadas de los alumnos son un conjunto de creencias establecidas por ellos y que el desarrollo de esos errores conduce a soluciones lógicas para los estudiantes”

- Para Bachelard (1998)

los entorpecimientos o confusiones que comete un alumno en sus procedimientos hacia la búsqueda de una construcción de conocimiento real son obstáculos epistemológicos que determinan simplemente lo “incompleto” del conocimiento del alumno, pero no necesariamente implican ausencia de conocimiento (citado en Escudero, 2007, p. 14).

2.8. Tipos de errores en problemas aritméticos verbales simples

Para los tipos de errores de problemas aritméticos simples cometidos por el alumnado vamos a seguir la clasificación que realiza Castro (1995):

- Sin respuesta: Bajo esta denominación se recogen los problemas que no han sido respondidos.
- Cambio de estructura: Este tipo de error se da cuando el alumnado interpreta una estructura multiplicativa como una aditiva o viceversa.
- Inversión de la relación: Se encuentra este tipo de error cuando el alumno realiza una operación inversa a la relación realmente existente en el enunciado del problema. Un ejemplo, sería cuando tiene que usar una división pero realmente realiza una multiplicación.
- Doble estructura o mezcla de estructura: En este error el resolutor del problema propuesto usa una estructura aditiva y una estructura multiplicativa para resolver una proposición que sólo requiere el uso de una multiplicación o división.

Un ejemplo es: María tiene 12 cromos. Su hermana tiene 3 veces más que ella. ¿Cuántos cromos tiene la hermana de María?

Cuando se comete el error de mezcla de estructura la respuesta suele ser: $12 \times 2 = 36$ cromos; $12 \text{ cromos} + 36 \text{ cromos} = 48 \text{ cromos}$.

Respuesta: La hermana de María tiene 48 cromos.

Sin embargo, la respuesta correcta sería realizar la primera operación $12 \times 3 = 36$ cromos.

Por tanto, la hermana de María tiene 36 cromos.

- Otros errores: Recoge otros errores cometidos por el alumnado y que no encajan en las tipologías descritas anteriormente.

Todos estos tipos de errores descritos han sido catalogados por Castro (1995) para problemas verbales de comparación multiplicativa de un paso pero que son aplicables a los problemas que nosotros usamos en nuestro estudio, ya que en ellos se utiliza la comparación.

2.9. Tipos de errores en problemas aritméticos verbales de dos pasos

Castro y Frías (2012) detectaron una serie de errores en problemas de dos pasos que los niños y niñas cometían y que no se daban para los problemas aritméticos de un paso.

Dichos errores son:

- Realizar sólo una operación: Este error consiste en realizar sólo una de dos operaciones necesarias para llegar a la solución del problema. En unas ocasiones dicha operación parece responder a realizar la operación correspondiente a la primera proposición del problema y en otros casos a realizar la segunda.
- Error de datos ordenados: Se detecta este error cuando las operaciones realizadas usan los datos que proporciona el enunciado del problema de manera ordenada, aparentemente sin responder a la lógica que se plantea en el problema resuelto.
- Repetir el dato no compartido: Este error se detecta si en la resolución del problema planteado se utiliza un mismo dato en las dos operaciones realizadas, cuando en realidad ese dato sólo es necesario utilizarlo una vez.

Por ello, se considera que se está repitiendo un dato que no es compartido en el esquema del problema.

3. METODOLOGÍA

3.1. Marco metodológico

En este punto comienza el diseño del trabajo de investigación realizado. Con la finalidad de poder dar respuesta a los objetivos que queremos alcanzar. Para lograrlo es necesario realizar un diseño metodológico que se adapte a ellos y que establezca el tipo de investigación a llevar a cabo, así como los instrumentos y técnicas de recogida de datos. En los epígrafes siguientes se podrá ir comprobando dicho diseño de forma detallada, justificando y explicando cada uno de los instrumentos, técnicas de recogida de información, análisis de datos y todos aquellos aspectos importantes para su correcto desarrollo.

Como se comentaba al inicio de este trabajo, la resolución de problemas en el aprendizaje de las Matemáticas es de gran importancia a lo largo de toda la escolarización de los niños y las niñas, ya que pone al alumnado en situaciones que no saben responder de antemano. Para su resolución es necesaria la ejercitación de distintos procesos de razonamiento haciendo uso además de los algoritmos que generalmente se trabajan de forma aislada y sin contextualizar en los ejercicios propuestos cuando se estudia cada uno de los algoritmos. Por tanto, a través de la resolución de problemas en el aula se contribuye a desarrollar la competencia matemática tan importante y perseguida a partir del año 2006 con la publicación de la LOE como normativa curricular estatal obligatoria. (MEC, 2006)

Dentro de la resolución de problemas encontramos los problemas aritméticos verbales de dos pasos en los que vamos a centrar nuestro estudio, partiendo de la posible línea de investigación propuesta por Castro y Frías en 2012 en sus conclusiones de su artículo Two-step arithmetic word problems. En ellas se sugiere el indagar sobre las razones psicológicas que originan los errores

cometidos por el alumnado en la resolución de problemas aritméticos verbales de uno y dos nodos, a través de un estudio de tipo cualitativo.

En esa línea es en la que se plantea el desarrollo del presente trabajo. Tras un proceso inicial de reflexión y trabajo en torno a dicho planteamiento se llegó al objetivo principal, que como anteriormente se concreto es:

- Explorar las causas de los errores de mezcla de estructura en los problemas de dos pasos con uno o dos nodos.

Dicho objetivo general, requiere la respuesta a otros objetivos más específicos que nos sirvieron para guiar el proceso de la investigación llevada a cabo y que son:

- Conocer que expresiones de los problemas aritméticos de dos pasos son los que llevan al alumnado a cometer el error de mezcla de estructura.
- Averiguar el razonamiento que realiza el alumnado en la resolución de este tipo de problemas.

Para lograrlos es necesario disponer de información que proceda de las propias vivencias de los niños y niñas cuando se enfrentan a la resolución de estos problemas.

3.2. Tipo de investigación

De acuerdo a los objetivos planteados y el tipo de conocimiento al que se quería llegar con esta investigación, se apreció la necesidad de tener un conocimiento que se desprendiera de la aplicación de un estudio cualitativo. Por ello, se decidió realizar un estudio de caso.

Según Walker (1983) (citado en Angulo y Vázquez, 2003, p. 16) define

el estudio de caso es como el examen de un ejemplo en acción. El estudio de unos incidentes y hechos específicos y la recogida selectiva de información de carácter biográfico, de personalidad, intenciones y valores, permite al que lo realiza, captar y reflejar los elementos de una situación que le dan significado...

Para Stake (1998) “el estudio de casos es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso singular, para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes” (p. 11).

Un estudio de caso abarca numerosas concepciones sobre la investigación cuya característica básica y común es la indagación de un ejemplo (Álvarez y Maroto, 2012)

Nuestro estudio de casos se ha centrado en un caso concreto, con un determinado grupo de alumnado para conocer y comprender un problema más amplio que el mero conocimiento de este alumnado. Por tanto, hemos realizado un estudio instrumental, ya que es un instrumento para conocer y comprender un problema más amplio a través del conocimiento de un caso particular (Angulo y Vázquez, 2003).

3.3. Diseño de la investigación

3.3.1. Selección de las personas participantes

Se partió de los siguientes parámetros que constituyen lo que sería nuestro marco institucional (Angulo y Vázquez, 2003).

- El estudio de casos se centró en un centro educativo situado en un núcleo urbano, en concreto en el centro de la capital almeriense, donde asisten niños y niñas de familias de nivel socio-económico medio y medio-alto dada su ubicación. Se trata de un centro concertado de enseñanza tradicional.

Se ha seleccionado este centro ya que la presente investigación es continuación de otra previa que se hizo en el mismo centro y con alumnado de los mismos niveles educativos. Además, se ha contado desde el momento inicial con el hecho de que el centro se ha mostrado interesado en la participación de la presente investigación, aspecto muy importante para poder llevarla a cabo (Angulo y Vázquez, 2003).

Nos interesa conocer y comprender la realidad de los estudiantes de 5º y 6º de Educación Primaria en relación a las causas psicológicas o de razonamiento que les llevan a cometer el error de mezcla de estructura en la resolución de problemas de enunciado verbal con dos pasos. Por ello, se tomaron datos de alumnado que el propio investigador consideró interesante para la recopilación de información pero, que quisieron participar de forma voluntaria para que tuviera fiabilidad la información que nos transmitiera. La selección de este alumnado se basó en la realización inicial de un cuestionario abierto de problemas que se analizó para detectar las personas que cometieron el error objeto de estudio. Dicho análisis se contrastó mediante la catalogación de dichos errores por el propio investigador y por otras dos personas expertas que trabajan en esta línea de investigación en el Departamento de Educación de la Universidad de Almería. El alumnado seleccionado para la investigación fue entrevistado posteriormente, previa autorización y negociación con el centro. También se realizó una entrevista al personal docente del alumnado seleccionado y no se consideró la necesidad de realizar ninguna más.

3.3.2. Ética en el estudio de casos

Un estudio de caso “supone la creación de un espacio social de relación entre quién investiga y las personas investigadas, se establece un ambiente de intereses encontrados entre ambos y por tanto, se hace imprescindible seguir y considerar unos criterios éticos” (Angulo y Vázquez, 2003, p. 20).

Entre ellos Angulo y Vázquez (2003) consideran:

- La negociación de la investigación.
- La colaboración que será voluntaria y libre.
- La confidencialidad tanto de las personas como de la información y de todo aquello que no se haya negociado con anterioridad.
- La imparcialidad del investigador y del informe realizado.
- La equidad con un trato justo, con su uso sólo con la finalidad propia de la investigación y con la posibilidad de discusión de los informes.
- El compromiso con el conocimiento de indagar hasta donde se pueda los acontecimientos estudiados, sin romper con el resto de criterios éticos ni crear un conocimiento tergiversado o superficial.

3.3.3. La negociación

3.3.3.1. La negociación del acceso

Como para poder realizar un estudio de caso es necesario llevar a cabo una negociación. Lo primero que se realizó fue contactar telefónicamente con la dirección del centro que accedió a la participación en el trabajo de investigación que recoge este informe.

Posteriormente, se procedió a concretar una visita, en la que tuvimos un primer acercamiento y conocimiento de los docentes implicados en la investigación. En esta primera cita de negociación se trataron los siguientes aspectos:

- La información del marco de investigación del estudio de caso, en el que se dio a conocer que se trataba de un estudio sobre los motivos de los errores que comete el alumnado en los problemas aritméticos de dos pasos.

- Se acordó salvaguardar el anonimato de los implicados, así como la confidencialidad de la información facilitada.
- La información que se desprendiera de la investigación sería conocida por el centro educativo implicado.
- Se realizaría, primeramente, un cuestionario que se aplicaría a todo el alumnado de 5º y 6º de Educación Primaria que no se encontrara en ningún programa de adaptación curricular en el área de Matemáticas. Una vez, analizado dicho cuestionario y detectados los aspectos sobre los que se quería profundizar a través de entrevistas, se comunicaría a los docentes responsables de cada nivel educativo. Se solicitaría autorización a los padres de dicho alumnado, para que tuvieran conocimiento y dieran permiso para realizar las entrevistas necesarias y que las mismas fueran grabadas en video y tratadas de forma confidencial y anónima. Además, se trató la necesidad de obtener información sobre documentación del profesorado y de clase de los alumnos y las alumnas que resultaran seleccionados y seleccionadas para buscar respuesta a las preguntas de la investigación.
- No se realizarían valoraciones de los resultados, ni de las opiniones o informaciones que se manejan de forma clasificatoria del alumnado participante, ya que el objeto de la investigación no es calificar, ni clasificar al alumnado. Lo que se pretendería es conocer el razonamiento que lleva a cabo el alumnado cuando comete el error de mezcla de estructura que se producen en los problemas aritméticos de dos pasos en base a las dificultades que el alumnado tiene que abordar para su resolución.

3.3.3.2. La negociación final

Al finalizar la elaboración del informe final se envió una copia al centro educativo para su análisis y lectura, de manera que puedan reconocer la veracidad de las interpretaciones realizadas y tratar la necesidad de cualquier matización del informe, que se acordaría entre las partes.

3.3.4. Estrategias de recogida de información

Durante la recogida de información del estudio de caso, se usaron las siguientes estrategias y técnicas de recogida de información:

- Cuestionarios abiertos: Se utilizaron un total de 4 cuestionarios de problemas aritméticos de enunciado verbal de dos pasos, unos con tres datos y otros con dos datos.

Dichos cuestionarios se usaron para detectar los errores que comete el alumnado de 5º y 6º de Primaria y realizar su clasificación. De dicha clasificación, se realizó una selección de las personas que posteriormente fueron entrevistadas para poder conocer y comprender las dificultades que el alumnado seleccionado encuentra en la resolución de los problemas matemáticos planteados y que les llevan a cometer el error de mezcla de estructura.

Los cuestionarios abiertos de problemas se elaboraron a partir de los utilizados en el estudio exploratorio previo, realizado sobre problemas aritméticos de dos pasos en el mismo centro y con alumnado de los mismos niveles educativos. No obstante, la distribución de problemas se hizo de manera diferente al cuestionario inicial que ellos utilizaron en otros estudios anteriores y que a continuación se describirá su composición de forma detallada. La organización de los problemas en los distintos cuestionarios se varió ya que anteriormente se estudió el grado de éxito o fracaso en la resolución de los distintos problemas de los cuestionarios. En el presente, sin embargo, lo que se pretendía era encontrar alumnado que comete el error de mezcla de estructura. Por ello, en cada cuestionario se recogieron problemas similares que nos permitieran detectar si siguen un patrón y ver si el error es sistemático en el mismo tipo de problemas o aleatorio. Así, nos permitía poder seleccionar al alumnado de interés para la presente investigación.

Los problemas incluidos en los cuestionarios son de dos pasos de comparación o combinación, que se limitan a categoría de problemas de comparación-combinación (Cp-Co), combinación-comparación (Co-Cp) y comparación-comparación (Co-Co). En estas categorías semánticas de problemas encontramos estructuras aritméticas jerárquicas y de compartir la parte y que condiciona los valores de las variables de los cuestionarios.

Las variables independientes que se consideraron para su elaboración son:

- Primera variable: Referida a la relación aritmética doble de los problemas planteados. En función de la naturaleza de dicha relación que puede ser, aditiva o multiplicativa. Dicha variable toma las siguientes designaciones y significados:

Para los problemas de comparación-combinación (Cp-Co)

A₁ designa una relación aditiva seguida de otra relación aditiva. (+, +)

A₂ designa una relación multiplicativa seguida de una relación aditiva.
(x, +)

Para los problemas de combinación-comparación (Co-Cp)

B₁ designa una relación aditiva seguida de otra relación aditiva. (+, +)

B₂ designa una relación aditiva seguida de una relación multiplicativa.
(+, x)

Para los problemas de comparación-comparación (Cp-Cp)

C₁ designa una relación aditiva seguida de una relación multiplicativa.
(+, x)

C₂ designa una relación multiplicativa seguida de una relación aditiva. (x, +)

- Segunda variable: El número de nodos que llamamos \underline{N}_1 a problemas de dos nodos y \underline{N}_2 a problemas de un nodo.
- Tercera variable: Es la categoría del problema y que llamaremos Cp-Co a los problemas de comparación en la primera relación y combinación en la segunda relación, Co-Cp a los problemas con una primera relación de combinación y la segunda de comparación y Cp-Cp a los problemas que presentan dos relaciones de comparación.
- Cuarta variable: Corresponde a la relación de aumento y disminución que se produce en las relaciones establecidas en las proposiciones que plantea el problema. Sus distintas posibilidades toman las siguientes designaciones:

Para los problemas de comparación-combinación (Cp-Co):

\underline{R}_1 indica una relación de aumento seguida de otra relación de aumento.

\underline{R}_2 indica una relación de disminución seguida de una relación de aumento.

Para los problemas de combinación-comparación (Co-Cp):

\underline{S}_1 indica una relación de disminución seguida de una relación de aumento.

\underline{S}_2 indica una relación de disminución seguida de una relación de disminución.

Para los problemas de comparación-comparación (Cp-Cp):

\underline{T}_1 refiere una situación de aumento seguida de otra relación de aumento.

\underline{T}_2 indica una relación de aumento seguida de una relación de disminución.

\underline{T}_3 indica una situación de disminución seguida de una relación de aumento.

\underline{T}_4 indica una relación de disminución seguida de otra relación de disminución.

En total, considerando todas estas variables se dispone de un total de 32 problemas que se han distribuido en cuatro cuestionarios con ocho problemas cada uno.

El cuestionario 1 contiene todos los problemas de Cp-Co con las dos relaciones R_1 y R_2 , N_1 y N_2 , A_1 y A_2 .

El cuestionario 2 contiene todos los problemas de Co-Cp con las dos relaciones S_1 y S_2 , N_1 y N_2 , B_1 y B_2 .

El cuestionario 3 contiene todos los problemas de Cp-Cp con las relaciones T_1 y T_3 , N_1 y N_2 , C_1 y C_2 .

El cuestionario 4 contiene todos los problemas de Cp-Cp con las relaciones T_2 y T_4 , N_1 y N_2 , C_1 y C_2 .

A continuación, se presenta la tabla que recoge las distintas variables que intervienen en cada problema.

		N_1		N_2	
		A_1	A_2	A_1	A_2
Cp-Co	R_1	1	2	5	6
	R_2	3	4	7	8
		B_1	B_2	B_1	B_2
Co-Cp	S_1	9	10	13	14
	S_2	11	12	15	16
		C_1	C_2	C_1	C_2
Cp-Cp	T_1	17	18	25	26
	T_2	19	20	27	28
	T_3	21	22	29	30
	T_4	23	24	31	32

Los problemas se han distribuido en cada cuestionario de la siguiente manera:

Cuestionario 1: 1, 8, 2, 7, 4, 5, 3, 6

Cuestionario 2: 9, 16, 10, 15, 12, 13, 11, 14

Cuestionario 3: 17, 30, 18, 29, 22, 25, 21, 26

Cuestionario 4: 19, 32, 20, 31, 24, 27, 23, 28

Condiciones en los enunciados de los problemas

1. Ordenación de los problemas en los cuestionarios

Se han creado cuestionarios abiertos de problemas con distintos niveles de dificultad en función de las distintas variables establecidas para cada problema. Según los resultados que se obtuvieron por Castro y Frías (2012) los problemas del cuestionario 1 son los que tienen mayor porcentaje de éxito cuando el alumnado se enfrenta a su resolución. Los problemas del cuestionario 2 y 4 son los que presentan una mayor dificultad para el alumnado y los problemas del cuestionario 3 serían intermedios en cuanto a dificultad entre unos y otros cuestionarios.

Al realizar dicha distribución de problemas por cuestionarios, nos encontramos con la situación de tener problemas similares en un mismo cuestionario. Esto nos llevó a la decisión de hacer una ordenación de problemas en los cuestionarios que cumpliera que cada problema con el siguiente y el anterior variara al menos en dos características diferentes. Para ello, se han utilizado en orden alterno problemas de dos nodos y de un nodo, variando así entre cada problema el número de datos del enunciado y bien el tipo de relación de aumento o disminución y el orden del tipo de relación aditiva o multiplicativa.

Al comenzar el diseño de los nuevos cuestionarios nos encontramos, por ejemplo, un problema que pregunta por una de las proposiciones del problema anterior, usando los mismos datos en cuanto a valor numérico, unidad del valor numérico y mismos personajes. Por ello, los problemas iniciales propuestos en el

estudio exploratorio de Castro y Frías han sido modificados en cantidades utilizadas, en unidades y en los personajes intervinientes. Además se han presentado, dentro del cuestionario, de manera desordenada para no situar los problemas similares de forma consecutiva, ya que se daba el caso de que la solución a un problema formaba parte del enunciado del siguiente.

	Cuestionario 1	Cuestionario 2	Cuestionario 3	Cuestionario 4
Orden en el cuestionario	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
Orden en el diseño	1, 8, 2, 7, 4, 5, 3, 6	9, 16, 10, 15, 12, 13, 11, 14	17, 30, 18, 29, 22, 25, 21, 26	19, 32, 20, 31, 24, 27, 23, 28

2. Contextos

En los problemas recogidos en los distintos cuestionarios, al ser problemas estáticos de dos pasos, el contexto está determinado por las categorías semánticas que consideramos y que son (Cp-Co, Co-Cp, Cp-Cp). También por las estructuras aritméticas de cada problema (aditiva-aditiva, aditiva-multiplicativa y multiplicativa-aditiva).

En el contexto intervienen además unos poseedores, unas cantidades poseídas correspondientes a unas magnitudes discretas y unos números que las cuantifican.

En los problemas de un nodo hay tres poseedores y en los problemas de dos nodos hay dos poseedores.

3. Situación aritmética

La situación aritmética que se producía en los cuestionarios de problemas abiertos usados en el estudio exploratorio de Castro y Frías (2012) ha sido totalmente variada por el hecho de haber modificado las cantidades en los problemas, sin variar su nivel de dificultad, pero que fue necesario modificar por

la cuestión anteriormente comentada de similitud entre problemas de un mismo cuestionario.

4. Expresión de los datos

Los problemas objeto de estudio de los cuestionarios diseñados para el presente estudio contienen estructuras simples de comparación y de combinación. Usan cantidades extensivas relacionadas con cantidades extensivas, todas ellas referidas a magnitudes discretas. En todos los problemas se presenta primeramente la introducción de uno o varios datos de cantidades extensivas, en función de que sea un problema de dos nodos o de uno. Seguidamente, se plantea una proposición que establece una relación entre cantidades extensivas y finalmente, se formula la pregunta del problema, en la que se introduce la segunda relación del problema, también entre cantidades extensivas.

5. Variación de elementos del contexto

Para que el contexto de los problemas de cada cuestionario no se encuentre repetido reiteradamente y parezca que se presenta continuamente los mismos problemas, variando solamente las preguntas o unidades extensivas que se utilizan, vamos a usar distintos poseedores, distintas magnitudes y distintos valores en los datos de los problemas, sin que por esto cambie la dificultad de los problemas que se recogieron en el estudio exploratorio realizado con anterioridad en el centro escolar.

En la siguiente tabla se recogen los problemas planteados en los distintos cuestionarios, especificando la categoría semántica, los nodos, poseedores, la magnitud, cantidades de los poseedores, los datos del problema y el orden en el diseño.

Categoría Semántica	Nodos	Poseedores	Magnitud	Cantidades poseedores	Datos del problema	Orden del diseño
Cp-Co	2	Juan y Pedro	Canicas	15, 45	15, 30	1
	1	José, David y Cristina	Euros	36, 72, 12	36, 72, 3	8
	2	Javier y Laura	Estampas	12, 36	12, 3	2
	1	Marta, Jesús y Jaime	Puntos	54, 108, 18	54, 108, 36	7
	2	Carmen y Daniel	Euros	72, 12	72, 6	4
	1	Lucía, Paula y Jorge	Cromos	15, 90, 45	15, 90, 30	5
	2	Raúl y Luis	Puntos	108, 18	108, 90	3
	1	Elena, Fabiola y Alejandro	Sellos	12, 72, 36	12, 72, 3	6
Co-Cp	2	Javier y Laura	Estampas	12, 36	12, 48	9
	1	José, David y Cristina	Euros	36, 72, 12	36, 72, 84	16
	2	Juan y Pedro	Canicas	15, 45	15, 60	10
	1	Maite, Jesús y Jaime	Puntos	54, 108, 18	54, 108, 126	15
	2	Carmen y Daniel	Euros	72, 12	72, 84	12
	1	Elena, Fabiola y Alejandro	Sellos	12, 72, 36	12, 72, 108	13
	2	Raúl y Luis	Puntos	108, 18	108, 126	11
	1	Lucía, Paula y Jorge	Cromos	15, 90, 45	15, 90, 135	14
Cp-Cp	2	Luis y Raúl	Puntos	18, 108	18, 90	17
	1	Alejandro, Fabiola y Elena	Sellos	36, 72, 12	36, 72, 3	30
	2	Daniel y Carmen	Euros	12, 72	12, 6	18

	1	Jorge, Paula y Lucía	Cromos	45, 90, 15	45, 90, 30	29
	2	Laura y Javier	Estampas	36, 12	36, 3	22
	1	Jaime, Jesús y Marta	Puntos	18, 54, 108	18, 54, 90	25
	2	Pedro y Juan	Canicas	45, 15	45, 30	21
	1	Cristina, David y José	Euros	12, 72, 48	12, 72, 4	26
	2	Luis y Raúl	Puntos	18, 108	18, 90	19
	1	Alejandro, Fabiola y Elena	Sellos	36, 72, 12	36, 72, 3	32
	2	Daniel y Carmen	Euros	12, 72	12, 6	20
	1	Jorge, Paula y Lucía	Cromos	45, 90, 15	45, 90, 30	31
	2	Laura y Javier	Estampas	36, 12	36, 3	24
	1	Jaime, Marta y Jesús	Puntos	18, 54, 108	18, 54, 90	27
	2	Pedro y Juan	Canicas	45, 15	45, 30	23
	1	Cristina, David y José	Euros	12, 72, 48	12, 72, 4	28

- Entrevistas: Se realizaron entrevistas, ya que nos apoyamos en la idea de que “las personas son capaces de ofrecer una explicación de su conducta, sus prácticas y sus acciones a quien les pregunta sobre ellas” (Angulo y Vázquez, 2003, p. 32). En ellas se escuchó con atención al entrevistado no imponiendo ni interpretaciones, ni respuestas, aunque intentando crear un ambiente de diálogo sincero para que el aprendizaje nos lleve a comprender la visión de la persona entrevistada procurando evitar malentendidos e interpretaciones equivocadas de lo que nos quiere contar (Angulo y Vázquez, 2003).

Las entrevistas que se hicieron son semi-estructuradas, en las que se contemplaron las posibles preguntas que nos podrían llevar al conocimiento del pensamiento o razonamiento que el alumnado realizó durante el proceso de la resolución de los problemas planteados en el cuestionario abierto de problemas.

Para el diseño de las entrevistas, primeramente, se contó con los cuestionarios y su resolución por el alumnado participante en la investigación. Una vez realizadas sus correcciones y detectados los errores cometidos y clasificados según se creyó, de realizar sólo una operación (UO), de cambio de estructura (CE), de mezcla de estructura (ME), de repetir el dato no compartido (RDNC), de datos ordenados (DOR), sin respuesta (Blanco), otros o simultaneidad de errores, se seleccionaron los participantes que se pretendía entrevistar en base a que hubieran cometido principalmente el error de mezcla de estructura.

Se procedió a informar al docente correspondiente del alumnado posible a entrevistar. Se facilitó un impreso de solicitud de autorización a sus padres, madres o tutores para poder realizar la entrevista grabándola en cámara de video y a poder usar y recabar la información necesaria para la investigación llevada a cabo.

Una vez que se dispuso de las pertinentes autorizaciones, se procedió a analizar los cuestionarios de problemas abiertos realizados para poder diseñar la entrevista semi-estructura de cada alumno y alumna. Dicha entrevista individualizada se confeccionó en base a la resolución de los problemas realizada por cada alumno o alumna.

Las entrevistas estaban compuestas de dos o tres partes, según el caso. La primera parte con preguntas genéricas sobre la materia de matemáticas y la opinión que tenía el alumnado sobre el cuestionario de problemas abierto que resolvió en clase en días pasados. Estas preguntas se diseñaron

con la finalidad de tener un primer acercamiento con la persona entrevistada y no comenzar directamente sobre la cuestión principal de la investigación. Al tratarse de una investigación de carácter cualitativo, las cuestiones generales abordadas también dan información valiosa sobre el caso que estamos estudiando.

En la segunda parte de la entrevista, con carácter general, se pasa a indagar sobre el proceso y el razonamiento del alumnado en la resolución de problemas del cuestionario en los que cometió el error de mezcla de estructura. Las preguntas fueron del tipo:

- Vamos al problema nº ... ¿entiendes el problema?
 - (SI) ¿Podrías explicármelo?
 - ¿Qué te está pidiendo?
 - ¿Qué cuentas has hecho para resolverlo?
 - ¿Qué obtienes al realizar esa operación? ¿por qué? ¿y esta otra?
 - ¿Puedes aclararme los datos que te dan y cómo obtienes el resultado?
 - (NO) Vamos a leerlo y me gustaría que me dijeras que es lo que no entiendes, ¿vale?
 - ¿Qué entiendes de lo que te dice el enunciado del problema?
 - ¿Qué no entiendes?

En las entrevistas que constaron de tres partes, la tercera parte consistió en una primera explicación de la expresión que llevaba al alumnado a cometer el error de cambio de estructura para posteriormente proponerle la realización de otros problemas con dicha estructura variada en cuanto la relación de aumento-disminución o de ser una proposición enunciada por el problema a ser la pregunta del problema. Por ejemplo, si en los problemas realizados en el cuestionario inicial se daba la expresión “veces más” en los nuevos problemas propuestos se trabajó con la expresión “veces menos”.

En dicha entrevista se pretendió profundizar y tener conocimiento de las dificultades que el alumnado encontró en la resolución de los problemas planteados. Esto nos permitía conocer cómo es el procesamiento de la información que realiza el alumnado de los datos que aporta el problema y de las cuestiones que plantea. Así como documentar los pasos que realiza el alumnado y por qué en el proceso de resolución del problema tratado en la entrevista.

Además de las entrevistas realizadas al alumnado, también se hizo una entrevista al docente para obtener información complementaria. De manera que, su conocimiento de los niños y niñas nos permitiera conocer mejor a los participantes y los procesos de razonamiento que pudieron tener en el momento de la resolución de los problemas propuestos.

Las entrevistas al docente, también fueron entrevistas semi-estructuras, que se diseñaron en base a toda la información de que se disponía, que era los cuestionarios abiertos de problemas y las entrevistas que se habían realizado al alumnado participante.

- Observación: Dado que el tema de estudio es un aspecto muy concreto y limitado a la resolución de una serie de problemas aritméticos de enunciado verbal, la observación que se ha realizado ha sido en las propias aulas del alumnado durante la realización del cuestionario inicial. Posteriormente mediante la observación de su modo de proceder en la resolución de los problemas que se les plantearon durante las entrevistas realizadas.

Por tanto, se planteó una observación pasiva en la que la investigadora fue una mera espectadora (Angulo y Vázquez, 2003).

Además, se llevó a cabo observación no participante, de la que se ha obtenido información a través de las distintas conversaciones y la entrevista que se realizó al docente.

- Recogida de documentación: Es necesaria la recogida y el tratamiento de la información incluyendo documentos privados, informales,... (Angulo y Vázquez, 2003). Por tanto, para completar la toma de datos se hizo una recogida de documentación de los cuadernos de trabajo del alumnado así como de las calificaciones que el docente tiene del área de Matemáticas del presente curso.
- Diario de campo: Durante todo el proceso y procedimiento de la investigación se elaboró un diario de campo en el que se fueron recogiendo todos los momentos de la investigación, visitas, entrevistas, conversaciones, acompañados de la fecha, objetivos del momento, duración y datos relevantes.

3.4. El registro y el análisis de datos

Toda la toma de datos que se realizó durante la investigación se incluyó en un archivo general, perfectamente clasificada, de manera que fuera fácilmente identificable y recuperable (cuestionarios, entrevistas, transcripciones de las entrevistas, documentos...).

El análisis de la información recopilada durante la fase de toma de datos, se realizó a través del uso de procedimientos tales como la codificación, la clasificación, la elaboración de mapas conceptuales, la generación de temas. Dichos procedimientos permiten la organización de los datos para entenderlos y poder producir conclusiones y la comprensión del caso estudiado (Simons, 2011).

Para el análisis de los datos con las distintas herramientas de investigación se utilizó el programa Atlas.ti ya que permite una mayor organización,

almacenamiento y recuperación más rápida de los datos que realizado manualmente.

Se inició creando una unidad hermenéutica en la que se incluyeron todos los archivos, documentos, entrevistas,... que se recopilaban desde el principio del trabajo. Así, se fueron analizando los distintos documentos recopilados, utilizando una categorización emergente que se fue mejorando durante todo el proceso de análisis de la información recogida. Con posterioridad, a la codificación de toda la información disponible, se crearon redes y familias con las que se facilitó el trabajo de comprensión e interpretación de los datos.

Una vez que ya se dispuso de toda la información codificada y realizadas las redes y familias de interés para el investigador, se procedió a rescatar la información analizada de manera organizada para poder elaborar el informe final.

3.5. La triangulación

Según Stake (1994):

la triangulación ha sido concebida como un proceso en el que desde múltiples perspectivas se clarifican los significados y se verifica la repetibilidad de una observación y una interpretación. Pero reconociendo que ninguna observación o interpretación es perfectamente repetible, la triangulación sirve también para clarificar el significado identificando diferentes maneras a través de las cuales es percibido el fenómeno (citado en Angulo y Vázquez, 2003, p. 44)

La triangulación se ha cubierto con el análisis de los datos que se recogieron de manera cruzada entre los cuestionarios, las entrevistas, la observación y la documentación.

4. RESULTADOS OBTENIDOS

Para presentar los resultados obtenidos de toda la fase de toma de datos y su análisis se recurre a hacer una descripción detallada de toda la información del alumnado participante en la investigación, por tratarse de alumnado con el tipo de error de mezcla de estructura.

PARTICIPANTE 1

Se trata de un participante de 5º de Educación Primaria, que durante el primer momento de la toma de datos a través de los cuestionarios abiertos realizó el cuestionario tipo 3. En el momento de cumplimentar de dicho cuestionario tenía una edad de 10 años.

Según el docente, es una persona que tiene buen comportamiento, interés por sus estudios, una buena relación con sus compañeros y compañeras. Se le dan bien las matemáticas aunque como nos indica el docente “en ciertas ocasiones con los problemillas tiene cierta dificultad, le cuesta entender”. Esta persona nos comenta que en cuanto al gusto por las matemáticas “bueno, se me dan un poco bien pero no me gustan mucho”. Todos estos aspectos se aprecian tanto en la observación realizada como en el análisis de los documentos recogidos, como son el cuaderno de la materia de Matemáticas en el que en determinadas ocasiones aparecen algunos problemas con algún error en su resolución o bien algunos problemas sin resolver. Además, todas estas consideraciones previas se constatan en las calificaciones que la participante tiene en la materia de Matemáticas, con una calificación de sobresaliente en el primer trimestre y una calificación de bien en el segundo trimestre, según se indica por el docente “debido a los problemillas que tiene en la resolución de problemas”.

Se seleccionó esta participante debido a que en el cuestionario tipo 3 que realizó tenía un patrón particular en el modo de proceder cuando resolvía determinados problemas que categorizamos con el error de mezcla de estructura.

En concreto en los problemas 2, 3, 5 y 8 del cuestionario realizó su resolución con el mismo patrón de error.

Durante la entrevista, la participante nos comentó sobre el cuestionario abierto de problemas que realizó que había tenido dificultades debido a que no comprendía expresiones como “veces más”.

A continuación, vamos a presentar el modo de proceder en la resolución de los problemas 2 y 3 sobre los que se le preguntó en la entrevista tanto a ella como al docente, para tener una mejor visión de su proceso seguido.

El problema nº 3 del cuestionario 3 es de comparación-comparación con relaciones de aumento-aumento, con dos nodos y con una primera proposición correspondiente a una estructura multiplicativa y la pregunta que corresponde a una estructura aditiva.

El enunciado del problema y la resolución que hace del mismo es el siguiente:

Problema 3.

Daniel tiene 12 euros
Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel
¿Cuántos euros tiene Carmen más que Daniel?

Datos
D: 12 euros
C: 6 veces más

$6 \text{ veces} = 6 \times 10 = 60$

$$\begin{array}{r} 60 \\ - 12 \\ \hline 48 \end{array}$$

Resultado: Carmen tiene 48 € más que Daniel

Iniciamos la entrevista, en torno a la resolución que realizó en el problema nº 3.

[P1 = participante 1, E= entrevistador]

E: Por favor, ¿puedes leer el problema?

P1 (Lee el problema)

E: ¿Lo entiendes?

P1: No mucho.

E: ¿No? ¿Qué es lo que entiendes y lo que no entiendes?

P1: Yo lo que entiendo es, umm, es que yo con lo de veces más, pues no lo entiendo mucho.

E: Vale, ¿y entonces tú como lo has hecho?

P1: pues, es que no sé. Pues, yo lo multipliqué por 10 porque no sé,... pero..., no sé...

E: No lo sabes, ¿por qué? ¿Por algo sería por 10?

P1: Si..., veces más, pues no sé.

(Silencio)

E: Vale. Vamos a ver. Te dice “Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel. Y tú para calcular eso, lo que me dices es que 6 veces...

P1: A lo mejor puede ser 6 por 10

E: Puede ser 6 por 10. Vale. Y luego entonces, ¿qué es lo que haces?

P1: Pues,..., (y señala la segunda operación que realizó en la resolución del problema $60 - 12 = 48$)

E: Para calcular ¿qué?

P1: Cuantos euros tiene Carmen más que Daniel.

E: Ah, cuantos euros tiene Carmen más que Daniel. Vale. Explícame entonces, ya los datos de donde los has sacado ¿vale?

P1: ... a ver... es que....

E: Al multiplicar 6×10 ¿qué es lo que has calculado?

P1: umm,..., es que hay veces que cuando yo no entiendo un problema como que hago lo que... creo que es.

.
.

.

P1: Yo me creía que las 6 veces más eran 6 por 10, y entonces los euros son 60.

E: Pero, ¿los euros de quién?

P1: De Carmen.

E: Ah, y por eso luego haces

P1: $60 - 12$

E: Vale, porque te está pidiendo ¿cuántos euros tiene Carmen más que Daniel?

P1: Si.

Por tanto, de la entrevista realizada a la alumna nos confirma nuestra hipótesis sobre el proceso de resolución del problema con la expresión “veces más” que no comprende. Hecho que le lleva a realizar una operación equívoca y que corresponde a la resolución de la primera proposición del problema.

Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel, que calcula con la operación 6×10 . Por lo que no tiene en cuenta la relación que dicha frase establece entre las cantidades poseídas por Carmen y por Daniel. Realiza el cálculo en base solamente a la expresión 6 veces más, que interpreta y resuelve como 6×10 . Teniendo en cuenta que con esta operación considera que ya tiene calculada la primera relación del problema. La segunda proposición, que corresponde a la pregunta del problema es resuelta con la operación $60 - 12 = 48$. Dicha operación, si se considera correcta ya que es la diferencia entre los euros que tienen Carmen y Daniel, según sus cálculos previos realizados por la participante.

Continuando con el problema nº 2 de su cuestionario, que es un problema de comparación-comparación con relaciones de disminución-aumento, con un nodo y con una primera proposición correspondiente a una estructura multiplicativa y la pregunta que corresponde a una estructura aditiva.

El enunciado del problema y su resolución es la siguiente:

Problema 2.

Alejandro tiene 36 sellos y Fabiola tiene 72 sellos
 Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro
 ¿Cuántos sellos tiene Fabiola más que Elena?

Datos

A: 36 sellos
 F: 72 sellos
 E: 3 veces menos

$3 \text{ veces} = 10 \times 3 = 30$

36	72
- 30	- 6
--- 06	--- 66

Resultado: Fabiola tiene 66 sellos mas que Elena

A través de la entrevista realizada a la participante 1, hemos podido conocer su razonamiento en el proceso de resolución del problema.

Se comienza la entrevista con el mismo proceso que en la anterior. Se pide a la participante que lea el enunciado del problema y de ahí surge de manera espontanea los comentarios de la entrevistada.

[P1 = participante 1, E= entrevistador]

P1: Pues, más o menos, que es como el otro porque el profe nos explicó un día antes, que a lo mejor los problemas puede ser que te dicen lo mismo pero con diferentes... datos. Entonces, más o menos, esto yo creo que es lo mismo pero con diferentes datos. Entonces, he hecho lo mismo, y después como... dice que Elena tenía tres veces menos sellos que Alejandro. Pues entonces 36 sellos que tenía Alejandro, pues, yo lo he restado y tiene 6 sellos (señalando la operación $36 - 30 = 6$).

E: Vale. ¿Quién tiene los 6 sellos?

P1: Elena.

E: Elena. Y este 30, ¿qué es lo que significa? (señalando al 30 resultado de $3 \text{ veces} = 10 \times 3 = 30$).

P1: Pues,...., lo que te he dicho antes, 3 veces yo me creía que era 3 por 10. Y entonces, he..., las 3 veces menos, 30, entonces $36 - 30$.

E: Vale, pero, ¿y por qué 10?

P1: pues, no se..., se me vino a la cabeza.

E: Vale. Y luego ya lo que tú haces es que has sacado que Elena tiene 6 sellos.

P1: Si.

E: ¿Cómo seguimos el problema?

P1: Pues,.... como te pone cuántos sellos tiene Fabiola más que Elena. Pues, entonces, pues lo resto.

E: Vale. Entonces has restado. ¿Qué operación has hecho?

P1: Pues, 72 sellos que tiene Fabiola menos los 6 que tiene Elena.

E: Vale. Entonces, con eso, ¿qué te sale?

P1: Pues... (silencio)

E: Los 66, ¿qué es? ¿Eso es la respuesta a la pregunta?

P1: Si.

E: Vale. Y como respuesta pones que Fabiola tiene 66 sellos más que Elena.

Por tanto, de esta parte de la entrevista donde se comenta el problema 2 del cuestionario, se comprueba que mantiene un proceso de pensamiento en la resolución del problema similar al proceso seguido en el problema nº 3 del cuestionario, que hemos analizado con anterioridad.

Comienza anotando los datos que le proporciona el problema. Para posteriormente realizar su planteamiento y ejecución en busca de la solución. Para la proposición, Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro, calcula primero 3 veces que para ella equivale a la operación $3 \times 10 = 30$. Como además dice “3 veces menos que Alejandro” ella interpreta que tiene que restar a los sellos que tiene Alejandro las 3 veces menos. De modo, que realiza la operación $36 - 30 = 6$, obteniendo así que Elena tiene 6 sellos, que corresponde al dato latente del problema. Para continuar hacia la búsqueda de la respuesta a la pregunta del

problema, “¿cuántos sellos tiene Fabiola más que Elena?” Ella piensa que si Elena tiene 6 sellos, como acaba de calcular, y Fabiola tiene 76 sellos, que es un dato del problema, tiene que hacer una sustracción de $72 - 6 = 66$ sellos. Por ello, responde que la respuesta al problema es que Fabiola tiene 66 sellos más que Elena. Esta última operación es correcta y respondería a la pregunta del problema, si no se hubiese cometido el error de mezcla de estructura que se ha producido en la primera proposición resuelta.

Al finalizar la segunda fase de la entrevista de esta alumna, se le provocó el aprendizaje de la expresión “veces más” a través de ejemplos, como dos veces más corresponde al doble, tres veces más al triple... Y posteriormente se le propuso la resolución de un problema en el que aparecía la expresión tres veces menos, en concreto el problema 5 del cuestionario 3 (Laura tiene 36 estampas. Javier tiene 3 veces menos estampas que Laura. ¿Cuántas estampas tiene Laura más que Javier?). Pero en este caso, a pesar de haber recibido la explicación previa, tampoco llegó a la asimilación del concepto de dicha expresión multiplicativa. Tras un rato intentando resolverlo no lo logró debido a que no comprendía la expresión “veces menos” y su traducción a la correspondiente operación aritmética.

PARTICIPANTE 2

Se trata de una participante de 6º de Educación Primaria que durante el primer momento de la toma de datos a través de los cuestionarios abiertos realizó el cuestionario tipo 2. En el momento de aplicación de dicho cuestionario tenía una edad de 11 años.

Según el docente es una persona “muy buena, muy trabajadora, de trabajo diario” pero que “tiene unas indecisiones terribles, sabe hacer las cosas pero se lía y se confunde, entonces a la hora de hacer una pruebecilla o control empieza a cometer errores, pero es muy buena y trabajadora”. Es muy buena tanto en Lengua como en Matemáticas y en todo, aunque se le da mejor la Lengua por la

indecisión que tiene en Matemáticas. Su trayectoria es muy buena, tanto como compañera de clase, tanto como alumna, en los dos años que está con el docente entrevistado, “una niña de sobresalientes”. Ella misma dice que no se le dan mal las Matemáticas y que el cuestionario de problemas que resolvió en la primera toma de datos de esta investigación le resultó fácil. La información que se desprende del análisis de datos de su cuaderno de clase y de las calificaciones del profesor en la asignatura confirma la información y opinión del docente.

No obstante, en la resolución del cuestionario abierto que realizó, se detectó que resolvía bien todos los problemas en los que no cometió el error de mezcla de estructura. Los problemas propuestos y resueltos correctamente eran todos con dos estructuras aditivas, de la categoría de combinación-comparación. Se comprueba que en todos los problemas que cometió dicho error aparecían las expresiones “veces más” o “veces menos” en la pregunta del problema. Eran todos de la categoría de combinación-comparación, pero con una estructura aditiva como primera relación a resolver y una estructura multiplicativa como segunda relación. El error de mezcla de estructura fue detectado en la resolución de los problemas 2, 3, 5 y 8 del cuestionario tipo 2. En todos ellos con un mismo patrón de resolución.

Durante la entrevista, la participante nos comentó que el cuestionario abierto de problemas le había parecido fácil.

A continuación, vamos a presentar el modo de proceder en la resolución del problema 2 sobre el que nos explicó su proceso de pensamiento seguido.

El problema nº 2 del cuestionario 2 es un problema de combinación-comparación con relaciones de disminución-disminución, con un nodo y con una primera proposición correspondiente a una estructura aditiva y la pregunta que corresponde a una estructura multiplicativa.

El enunciado del problema y su resolución es:

Problema 2.

José tiene 36 euros y David tiene 72 euros
 Entre Cristina y David tienen 84 euros
 ¿Cuántas veces menos euros tiene Cristina que José?

$$\begin{array}{r} 84 \\ - 72 \\ \hline 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \overline{) 12} \\ \underline{00} \quad 3 \end{array}$$
~~$$\begin{array}{r} 36 \\ - 12 \\ \hline 24 \end{array}$$~~

$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 12} \\ \underline{00} \quad 2 \end{array}$$

Resultado: Cristina tiene 2 veces menos de euros.

Iniciamos la entrevista, en torno a la resolución que realizó en el problema nº 2.

[P2 = participante 2, E= entrevistador]

E: Por favor, ¿puedes leer el problema?

P2 (Lee el problema)

E: ¿Me lo podrías explicar?

P2: Que José tiene 36 euros y David 72, pero, Cristina y David tienen 84 y dice que cuántas veces menos tiene Cristina que José. Entonces, tienes que saber lo que tiene Cristina y por ahí se tiene que 84 que son los euros que tienen entre Cristina y David, pues le quitas los de David para que te salgan los de Cristina.

E: Vale. ¿Y qué más?

P2: Ah, y el resultado que te da 12, ehh,..., ah y como José tiene 36 euros y Cristina tiene 12, pues,... dice cuántas veces menos, pues,... para saber cuántas veces es, pues, 36 entre 12, que da 3. Pues 3 veces menos, ummm... si tres veces menos.

E: Vale, y entonces tres veces menos es... ¿Tres veces menos a qué es a lo que corresponde?

P2: A lo que tiene Cristina. Ah, bueno, y que como José tiene 36, que son 3 veces las que tiene Cristina, pero... como tiene... que... (se ríe)... Ah, tiene 3 veces pues, el dinero de José, eh, eh, son 3 veces el de Cristina, entonces como dice cuántas veces menos, pues menos 12, menos una vez que es lo que tiene... (silencio). No sé (se ríe)

E: Vale, ¿eso es lo que tú has calculado con estas operaciones? (las señalo)

The image shows two handwritten calculations. The first is a subtraction:
$$\begin{array}{r} 36 \\ -12 \\ \hline 24 \end{array}$$
 The second is a division:
$$\begin{array}{r} 24 \overline{) 12} \\ \underline{00} \\ 2 \end{array}$$

P2: Si...

E: Porque tú has calculado lo que tú me has explicado, es que haces $36 - 12 = 24$ para saber cuánto tiene Cristina, ¿no? Y habías dividido lo de José entre lo que tiene Cristina para saber cuántas veces tendría que tener Cristina ese dinero para tener los 36. Y luego, a partir de ahí, ¿qué es lo que has hecho?

P2: Que como José tiene 36 euros, pues,... y Cristina tiene 12 euros, um, pues 36..., si, si, Cristina tiene 12 euros, um,... ah, pues si, le quita los que tiene Cristina, se los quitas a los que tiene José y entonces lo que te da es lo que tiene más (haciendo un gesto como de añadir de más).

E: Lo que tiene demás ¿no?

P2: Si

E: Entonces, eso es lo que has calculado. ¿Y cuál es la solución que te da?

P2: 2 veces menos, porque le quito una vez que es lo que tiene más.

E: Vale. Entonces, ¿qué significa “cuántas veces menos euros tiene Cristina que José”?

P2: Que cuántas veces de más... no, si... um, que cuántas veces pero sin contar la suya.

E: Ah, sin contar la suya.

P2: Si.

E: Vale.

P2: Es que cuando lo estaba haciendo pensé también en la otra, pero luego pensé sin contar la suya pues lo hice así.

E: Pero, ¿estabas segura de lo que estabas haciendo?

P2: Si, bueno también pensaba que lo otro estaba bien.

Por tanto, de la entrevista realizada a la alumna nos confirma nuestra hipótesis sobre el proceso de resolución del problema con la expresión “veces menos” que no comprendió correctamente. Hecho que le lleva a resolver la proposición que contiene esa expresión de manera errónea, aunque ella misma en la entrevista nos comenta que pensó en el modo correcto de resolver la proposición de veces menos. No obstante, como ambas posibilidades de resolución de dicha expresión le parecieron correctas se decidió aplicar una estructura que repitió en todos los problemas del cuestionario en los que se encontró la expresión “veces menos”.

La segunda relación que plantea el problema, que corresponde a una estructura multiplicativa de comparación con una relación de disminución es la que resuelve de forma errónea. Al considerar que el cálculo se realiza sobre la diferencia entre la cantidad de los poseedores, sin embargo, dicha proposición resuelta correctamente se realizaría sobre la totalidad de las cantidades.

Con esta participante, en la entrevista se desarrolló la tercera fase, en la que se planteó que resolviera varios problemas. A continuación, vamos a verlos.

El primer problema que resolvió fue el problema 3 del cuestionario tipo 3.

Cuestionario 3 - Problema 3

Daniel tiene 12 euros.
Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel.
¿Cuántos euros tiene Carmen más que Daniel?

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \\ - 72 \\ \hline 60 \end{array}$$

Solución: 60 € tiene Carmen más que Daniel.

[P2 = participante 2, E= entrevistador]

E: Por favor, ¿puedes leer el problema?

P2 (Lee el problema)

P2: Los euros que tiene Daniel, pues, como Carmen tiene 6 veces más, pues, 6 veces más, y...

E: ¿Y con eso obtienes?

P2: 72, y...

E: ¿72 qué es?

P2: 72 que son los euros que tiene Daniel.

E: Vale.

P2: 72, y como dice las veces que tiene más que Daniel, pues... pero más, las que le sobran.

E: Vale.

P2: Pues, le quitas las que tiene (señalando la operación $72-12 = 60$) que da 60.

E: Vale. Te da 60. ¿Y eso qué es?

P2: Los euros que tiene Carmen más que Daniel.

En este caso, vemos que la expresión multiplicativa del problema “6 veces más”, la resuelve correctamente. Dicha expresión la encontramos en la primera relación del problema cuando dice “Carmen tiene 6 veces más que Daniel”, que resuelve multiplicando los 12 euros que tiene Daniel por 6, para calcular los 72 euros que posee Carmen. Por lo tanto, vemos como en este caso no aplica la estructura que aplicó en el problema anterior de considerar 6 veces más como añadir 6 veces más a la cantidad que posee Daniel.

Tras la resolución del problema anterior, se le propuso realizar el siguiente:

Cuestionario 3- Problema 4

Jorge tiene 45 cromos y Paula tiene 90 cromos.
 Lucía tiene 30 cromos menos que Jorge.
 ¿Cuántas veces más cromos tiene Paula que Lucía?

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 30 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 45 \\ - 30 \\ \hline 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 90 \\ \overline{) 15} \\ 006 \end{array}$$

$$6 \cdot 4 = 5$$

Solución: 5 veces tiene mas cromos que Lucía

Es el problema 4 del cuestionario tipo 3, de comparación-comparación, con relaciones de disminución-aumento, con un nodo y con una primera proposición correspondiente a una estructura aditiva y la pregunta que corresponde a una estructura multiplicativa.

En la entrevista obtuvimos la siguiente información respecto al proceso de resolución seguido por la participante 2.

[P2 = participante 2, E= entrevistador]

P2: Pues, Jorge que tiene 45 cromos, um, um. Bueno, Lucía tiene 30 cromos menos que Jorge. Entonces si los resto, voy a saber que tiene Lucía. Entonces, me da 15 y... como dice cuántos cromos tiene Paula más que Lucía... cuántas veces más cromos tiene Paula que Lucía. Pues, 90 que tiene Paula entre 15, para saber cuántas son las de Lucía, me da 6 y, um, como dice las veces de más, más yo creo que son demás, tienes que quitarle eso y te da 5.

E: Vale. ¿Lo que me estás diciendo es que como te da aquí (señalando la operación $90:15=6$) 6 veces al hacer la división, entonces le estas quitando la que tiene Lucía? ¿No?

P2: Si.

E: Vale. ¿Por eso dices que la solución es 5 veces tiene más cromos que Lucía? ¿No?

P2: Si.

Como vemos en la resolución de este último problema se mantiene el mismo patrón de resolución que el problema 2 del cuestionario 2. En ambos, para resolver la expresión “veces más” situada en la pregunta del problema considera un significado mezcla de estructura con una estructura aditiva y una estructura multiplicativa.

Además se le propuso la resolución del problema 4 del cuestionario 4:

Cuestionario 4 - Problema 2

Alejandro tiene 36 sellos y Fabiola tiene 72 sellos.
Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro.
¿Cuántos sellos tiene Elena menos que Fabiola?

$$\begin{array}{r} 36 \overline{) 72} \\ \underline{06} \\ 06 \\ \underline{00} \\ 0 \end{array}$$

Solución: _____

Se trata de un problema de comparación-comparación, con relaciones de disminución-disminución, con un nodo y con una primera proposición correspondiente a una estructura multiplicativa y la pregunta que corresponde a una estructura aditiva.

Durante su fase de resolución surgió la entrevista, al apreciar la entrevistadora que se encontraba parada porque algo no iba bien.

[P2 = participante 2, E= entrevistador]

E: ¿Qué pasa? ¿Lo entiendes?

P2: No.

E: ¿No? A ver, léelo y vemos lo que entiendes y lo que no entiendes, ¿vale?

P2: (Lee el problema)

P2: Que como Alejandro tiene 36 sellos y Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro, um, 3 veces menos. Entonces tiene que tener más que Alejandro. Pero ¿y cómo se los que tiene Elena?

E: ¿Cómo?

P2: Que dice que Alejandro tiene 36 sellos y Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro. 36×3 , lo que te dé es lo que tiene menos Elena, pero si no te dice lo que tiene Elena como se lo resto.

E: ¿En esta cuenta que es lo que habías hecho? (señalando $36:3=12$)

P2: Al principio, que cuantos, que como Alejandro tiene 36 sellos y Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro, pues..., 36 sellos que tiene Alejandro entre 3 veces menos que tiene Alejandro, Elena.

E: ¿Y con eso que has obtenido?

P2: Umm, 12.

E: Y ese 12, ¿qué es?

P2: 12 sellos que tiene Elena.

E: ¿Si?

P2: No.

E: ¿Por qué?

P2: Porque... no sé.

E: No lo sabes, ¿por qué lo has hecho?

P2: Umm...

(Tras un rato de silencio le proponemos pasar al siguiente problema que tenemos preparado para hacer durante la entrevista. Tras la realización de dicho

problema volvemos a retomar este problema y esta es la información que obtenemos).

P2: No lo entiendo.

E: ¿Por qué? ¿Qué es lo que no entiendes?

P2: Porque me dice 3 veces menos sellos que Alejandro, pues sería 36×3 .

E: ¿Por qué por 3?

P2: Porque te dice 3 veces menos que sería $36-36-36\dots$

E: Para calcular lo que tiene Elena. ¿Cómo lo harías, dices?

P2: Pues, 3 veces menos, como tiene 36 sellos, pues 3 veces menos 36×3 ... creo...

E: ¿Por qué? ¿Sabrías explicármelo?

P2: Para restárselo a lo que tiene Elena... No sé...

E: Pruébalo, si quieres. A ver si así puedes hacer el problema.

P2: No, no lo puedo hacer.

E: ¿No? ¿Por qué no lo puedes hacer?

P2: Porque luego se lo tengo que restar a algo y no me da nada.

Por tanto, de esta parte de la entrevista donde se comenta el problema 2 del cuestionario 4, se comprueba que mantiene un proceso de pensamiento en la resolución del problema similar al proceso seguido en el problema nº 3 del cuestionario. Por ello se encuentra con la dificultad de no poder resolver la primera proposición del problema. Al entender la expresión “veces menos” como una mezcla de estructura aditiva y multiplicativa, se encuentra en la situación de poder llevar a cabo la operación de la estructura multiplicativa pero le falta un dato para poder resolver la estructura aditiva, que ella comprende que compone la resolución de la expresión “veces menos”.

De la entrevista se desprende que en este problema la alumna llega a una situación de bloqueo que encuentra en su patrón de pensamiento de mezcla de estructura que no sabe resolver. Aunque, podría haberlo resuelto considerando que tendría que hacer cuatro partes, para que una de esas partes fuera la de Elena,

según su esquema de pensamiento de mezcla de estructura que se da de forma repetida en los problemas vistos anteriormente.

Se le propuso un último problema a resolver:

Cuestionario 4- Problema 1

En un juego Luis ha conseguido 18 puntos.
Raúl ha conseguido 90 puntos más que Luis.
¿Cuántas veces menos puntos ha conseguido Luis que Raúl?

$$\begin{array}{r} 90 \\ + 18 \\ \hline 108 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 108 \overline{) 18} \\ 18 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 - 1 = 17 \\ 6 - 1 = 5 \end{array}$$

Solución: $\frac{108}{18} = 6$ veces menos puntos ha conseguido Luis que Raúl.

Se trata del problema 1 del cuestionario 4 de la categoría de comparación-comparación, con relaciones de aumento-disminución, con dos nodos y con una primera proposición correspondiente a una estructura aditiva y la pregunta que corresponde a una estructura multiplicativa.

La información que obtuvimos en la entrevista fue la siguiente:

P2: Raúl ha conseguido 90 puntos más que Luis. Pues, $90+18=108$ que tiene Raúl. Y, ¿cuántas veces menos puntos ha conseguido Luis que Raúl? Pues, 108 puntos que tiene Raúl entre 18 que tiene Luis, son 6 veces menos que tiene... Raúl ... entonces, umm... (silencio)

E: ¿Qué es?

P2: Esto es que me he equivocado (señala la operación que pone $18-1=17$)
 $6-1$ da 5.

E: Ah, vale.

P2: Porque tiene 6, Luis tiene 6 veces lo que tiene menos que Raúl, pues... he conseguido 5 veces menos.

E: Si quieres, modifícalo el problema.

P2: ¿La tacho? (señalando la operación que ha dicho en su momento que era errónea).

E: Vale.

Finalmente, en este último problema vemos como se vuelve a repetir el error de mezcla de estructura. Así podemos decir que su razonamiento en las expresiones “veces menos” y “veces más” responde al error de mezcla de estructura, al producirse una doble estructura, una aditiva y una multiplicativa.

PARTICIPANTE 3

Se trata de un participante de 6º de Educación Primaria que realizó el cuestionario tipo 3. Con una edad de 12 años.

Según el docente es “uno de los mejores alumnos, por no decir el mejor”. Su evolución en clase es buena. “Además, es una persona que no molesta en clase, buen compañero, no hay ninguna queja de ningún tipo. Trabajo a diario, te lo hace todo bien” Su trayectoria desde el curso pasado en que comenzó con el docente entrevistado es muy buena. “Además tiene interés por aprender cosas nuevas”, “Es de las personas que cuando hay algo nuevo, aunque tenga dificultad, le interesa.” El alumno nos comenta que las Matemáticas le gustan, aunque los problemas a veces se le hacen muy pesados porque tiene que pensar mucho. Todos estos datos obtenidos se ven reforzados con el análisis del cuaderno de trabajo del alumno que tiene todas las actividades y problemas bien hechos y de forma clara y ordenada. Sus calificaciones en Matemáticas son todas de sobresaliente.

Del cuestionario de problemas tipo 3, que realizó como parte de este estudio, nos comenta: “había que pensarlos. A veces creías que una cosa era de una manera y luego descubrías que había otra manera, por ejemplo, había una expresión que no entendía. No recuerdo como era la expresión, pero había que pensarlos.”

Este participante fue seleccionado dado que en los problemas que cometió errores fueron todos del tipo de mezcla de estructura. En concreto, en los problemas 1, 4, 6 y 7. El resto de problemas del cuestionario los hizo todos correctamente.

Durante la entrevista, el participante nos comentó sobre el cuestionario abierto de problemas que había tenido dificultades debido a que no comprendía expresiones como “cuántas veces más”, aunque en el transcurso de la realización de la prueba si llegó a comprenderla.

A continuación presentamos su modo de proceder en la resolución del problema 1 de su cuestionario:

Problema 1.

En un juego, Luis ha conseguido 18 puntos
Raúl ha conseguido 90 puntos más que Luis
¿Cuántas veces más puntos ha conseguido Raúl que Luis?

Datos: Luis = 18 puntos. Raúl = 90 puntos más que Luis.

$$\begin{array}{r}
 90 \\
 +18 \\
 \hline
 108
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 90 \\
 \hline
 18
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 18 \\
 \times 5 \\
 \hline
 90
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 108 \\
 \hline
 18
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 108 \\
 \hline
 6
 \end{array}$$

Resultado: Raúl ha conseguido 5 veces más puntos que Luis.

Se trata de un problema de comparación-comparación, con dos nodos, relaciones de aumento-aumento, una primera estructura aditiva y la segunda estructura para dar respuesta a la pregunta del problema es multiplicativa.

La resolución del problema realizado respondió al siguiente razonamiento:

[P3 = participante 3, E= entrevistador]

E: Esta era tu prueba, ¿verdad? Lee el problema nº 1, ¿vale?

P3: Por supuesto. En un juego Luis ha conseguido 18 puntos. Raúl ha conseguido 90 puntos más que Luis. Ésta es la expresión, esa era la expresión. Bueno, no, esta “cuántas veces más”, ¿cuántas veces más ha conseguido Raúl que Luis?

E: Vale. ¿Entiendes lo que te dice el problema?

P3: Bueno, yo antes cuando empecé veces las subrayé porque yo la expresión “cuántas veces más” no la entendía, pero luego ya si la entendí. Entonces, lo que hice, pues fue... a ver un momento... Bueno, es que a veces, ¡ves lo que digo! A veces hace falta pensarlos.

E: Si. Míralo tranquilamente y cuando quieras lo vemos. Léelo las veces que te haga falta.

(Transcurrido un tiempo de aproximadamente un minuto y medio continuamos hablando sobre el problema)

P3: Dice: Luis ha conseguido 18 puntos. Si Raúl ha conseguido 90 puntos más. Pues, $90+18$ son 108 puntos. Y, si dice cuántas veces más... Si por ejemplo 18 lo multiplicamos por... Esta es la división que hice (señala la división $108:18$), esta otra no tiene mucha importancia (señala la división $90:18$) 108 entre 18, ¿no?

E: Si.

P3: 18 si lo multiplicamos por 6, nos da 108, lo que significa que... ah, no, espérate (...)

P3: Me parece que eran 6 veces, ¿no?... No sé... No sé si eran 6 o 5 veces.

E: ¿Por qué tienes esa duda?

P3: No sé. Bueno, es que hace ya mucho tiempo que lo hice, ¿no?

E: Claro.

P3: Aquí dice que son 108 los que has conseguido y si los divido, los 108 puntos que ha conseguido entre los 18 puntos que ha conseguido Luis, entonces me saldría. Y aquí dice que son 5 veces, lo que no me acuerdo es porqué puse 5, puede ser esto de aquí (señalando la división $90:18$).

E: Parece (...)

P3: A ver, si dice cuántas veces más puntos. Si tienen 108, creo que podía ser que si a 108 le restásemos 18. Bueno, es que si ha conseguido 90 puntos más, pues, decía, las 6 veces son 6 veces pero, creo que ya sé porque lo hice mal. Decía cuántas veces más, entonces, cuando dividía 90 entre 18 eran 5 veces. Porque no sé si era la vez número 6 porque, es como si Luis tuvieses cero puntos y dice que tiene 18, pues por eso. Si. Deben de ser 5 veces. Ahora me acuerdo.

E: Entonces, ¿qué...

P3: Un poquillo confuso estaba, ¡la verdad! Cuando empecé.

E: Vale. Entonces, ¿para ti qué significa “cuantas veces más puntos ha conseguido Raúl que Luís”?

P3: Bueno, sería... pues sería, si a 108 le restásemos los 18 nos saldría los 90 puntos que ha conseguido más que Luis. Ahora esos 90 puntos, ¿vale? Si nos dice “¿cuántas veces más?” 18 por 5 son 90. Y entonces, 5 son las veces, ha conseguido 5 veces más que Luís que serían 90 puntos.

E: Vale. O sea, que me estás diciendo que las 5 veces son a parte de sus puntos. Los puntos que tiene demás los divides entre los suyos, ¿no?

P3: Si. Porque si ahora mismo Luis tiene 18 puntos y Raúl tiene 90 puntos más, ¿no? Sería Raúl tiene 108 puntos ¿no?

E: Si.

P3: Entonces, tiene 90 puntos más que Luís porque Luís tiene..., o sea, tiene 90 puntos más que serían 5 veces más porque si ahora mismo los 90 los divides, los 90 puntos más que tiene Luis, si lo dividimos entre 18 nos da 5 que son las veces más que tiene Luis.

En este alumno vemos como se da un patrón de mezcla de estructura similar a la participante 2, en el que entiende la expresión “veces más” como una mezcla de estructura aditiva y multiplicativa. Realiza el cálculo de las veces más sobre la diferencia entre las cantidades de los dos poseedores comparados.

Además, durante el transcurso de la entrevista se le preguntó que nos explicara el proceso de resolución del problema 4 de su cuestionario, que es de categoría

comparación-comparación, con un nodo, unas relaciones de disminución-disminución y una estructura multiplicativa precedida de otra estructura aditiva.

Problema 4.

Jorge tiene 45 cromos y Paula tiene 90 cromos
 Lucía tiene 30 cromos menos que Jorge
 ¿Cuántas veces más cromos tiene Paula que Lucía?

Resp. - Jorge = 45 cromos Paula = 90 cromos Lucía = 30 cromos menos que Jorge.

Op = $\frac{45}{30} = \frac{30}{15}$ $\frac{90}{15} = \frac{15}{75}$ $\frac{15}{75} \times 5 = \frac{75}{75}$

Resultado: Paula tiene 5 veces más cromos que Lucía.

P3: Dice que Jorge tiene 45 cromos y Lucía tiene 30 cromos menos que Jorge. Son 15 cromos los que tiene Lucía. Y ahora mismo dice: ¿Cuántas veces más cromos tiene Paula que Lucía? Y si Paula tiene 90 cromos, si se los restamos a 15 son 75 cromos, que son los que tiene más Paula que Lucía, que sería 5 veces más. Porque si a los 15 que tiene Lucía los multiplicas por 5, nos saldrían 75 que son los que tiene Paula más que Lucía.

E: Ah, vale. Entonces, es la misma situación que antes, ¿no?

P3: Sí, más o menos. Es que la expresión “cuántas veces más” al principio no la entendía, pero luego ya descubrí, es como si dijeras que tiene 75 cromos más pero dicho en veces, porque si los 15, por ejemplo, los 15 que tiene Lucía los multiplicas por 5 te dan 75 que son los cromos que tiene Paula más que Lucía, que sería lo mismo que decir que Paula tiene 5 veces más cromos.

E: Vale, pues muchísimas gracias por todo.

De aquí se confirma la idea repetida y conformada del error de mezcla de estructura. El alumno busca un número de veces que hay que repetir la cantidad poseída del referente hasta alcanzar la diferencia entre el referente y el comparado.

No obstante, esta situación está clara cuando la expresión de comparación multiplicativa se encuentra en la pregunta. Nos encontramos que cuando la expresión de comparación multiplicativa no está en la pregunta, el alumno resuelve bien la proposición que plantea el problema.

Por ejemplo, en la resolución del problema 3 de su cuestionario tipo hemos encontrado que la expresión “Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel” la resuelve correctamente, como se puede ver a continuación:

Problema 3.

Daniel tiene 12 euros
Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel
¿Cuántos euros tiene Carmen más que Daniel?

Platos = Daniel = 12 €. Carmen = 6 veces más € que Daniel

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 6 \\ \hline 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} 72 \\ - 12 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ + 12 \\ \hline 72 \end{array}$$

Resultado: *Carmen tiene 60€ más que Daniel.*

5. CONCLUSIONES

En este apartado se resaltan los resultados obtenidos en nuestra investigación.

La participante 1 no comprende las expresiones multiplicativas “veces más” y “veces menos”. Por ello, cuando resuelve un problema con una estructura multiplicativa de comparación comete el error de mezcla de estructura. En dicho error sigue un patrón de resolución que responde a resolver la expresión “n veces más” o “n veces menos” como $n \times 10$.

En los problemas con un nodo, dicha cantidad la suma o resta al referente en función de lo que la expresión “veces más” o “veces menos” le sugiera con la palabra clave “más” o “menos”.

En los problemas con dos nodos, ignora la relación establecida en la proposición donde aparece la comparación multiplicativa, ya que al disponer sólo de dos datos no puede realizar el mismo proceso de cálculo que cuando resuelve problemas de la misma tipología pero con un nodo, en los que aparecen tres datos completos.

La participante 2 comete el error de mezcla de estructura con las expresiones “veces más” y “veces menos” cuando aparecen en la pregunta del problema. Sin embargo, cuando se le propuso un problema con la expresión “veces más” como dato completo el cálculo lo hizo correctamente.

Por otra parte, cuando la expresión “veces menos” aparece como dato del problema se encuentra con la dificultad de no poder dar respuesta a dicha proposición, ya que dice que le falta conocer un dato.

Este error se produce en la participante 2 debido a que ella interpreta la expresión “veces menos” como cuántas veces más sin contar la suya. No obstante, reconoce que pensó la opción de poder interpretarla como las veces que uno contiene al otro, pero como no estaba segura y las dos opciones le parecieron correctas siguió un mismo patrón que aplicó en la mayoría de los problemas que resolvió con dichas expresiones multiplicativas de comparación.

El participante 3 comete el error de mezcla de estructura de manera similar a la participante 2. Las expresiones “veces más” y “veces menos” no las comprendió correctamente y le llevaron a cometer dicho error, pero sólo cuando las encontraba en la pregunta del problema. En los casos en que eran datos del problema, el proceso de cálculo lo realizó correctamente. Esta situación se dio tanto en problemas con un nodo como con dos nodos.

En los problemas en que las expresiones de comparación multiplicativa se encontraban en la pregunta él lo interpretaba que había que calcularlos sobre la diferencia entre el referente y el comparado. Y en los problemas en que dichas

expresiones aparecían como dato entendía que se refería a una relación proporcional entre ambos.

Como hemos señalado anteriormente queda pendiente el análisis de los otros tipos de errores que previsiblemente nos permitirán extraer conclusiones más generales.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Álvarez, C. A. y Maroto, J. L. S. F. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, 28 (1).
- Angulo, F. y Vázquez, R. (2003). Los Estudios de Caso. Una aproximación teórica. En F. Angulo Rasco, y R. Vázquez Recio, *Introducción a los estudios de casos* (pp. 15-51). Málaga: Aljibe.
- Benítez, J. (1994). La importancia del lenguaje en la resolución de problemas aritméticos de adición y sustracción. *SUMA*, 16, 4-8.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1991). La operación de sumar: el caso de los problemas verbales. *SUMA*, 8, 35-39.
- Carpenter, T.P. y Moser, J.M.(1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. In R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 7-44). Orlando, Florida: Academic Press.
- Castro, E. M. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.
- Castro, E. y Frías, A. (2012). Two-step arithmetic word problems. *The Mathematics Enthusiast*, 9(1&2), 37-64.
- Castro, E., Castro, E., Rico, L., Gutiérrez, J., Tortosa, A., Segovia, I., González, E., Morcillo, N. y Fernández, F. (1998). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En Rico, L. y Sierra, M. (Eds), *Actas del I Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Zamora.
- Castro, E., Rico, L. y Gil, F. (1992). Enfoques de Investigación en Problemas Verbales Aritméticos Aditivos. *Enseñanza de las Ciencias*, 243-253.

- Coronel, M. d. y Curotto, M. M. (2008). La resolución de problemas como estrategia de enseñanza y aprendizaje. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, 7(2), 463-479.
- Escudero, R. (Diciembre de 2007). Uso de los errores matemáticos como dispositivo didáctico para generar aprendizaje de la racionalización de radicales de tercer orden. *Zona Próxima Revista del Instituto de Estudios Superiores de Educación. Universidad del Norte*(8), 12-25.
- Frías, A. y Castro, E. (2004). Influencia del número de conexiones en la representación simbólica de problemas aritméticos. En E. Castro y E. De la Torre (Ed.), *Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 207-218). A Coruña: Universidad da Coruña.
- Frías, A. y Castro, E. (2007a). Enfoques de Investigación en Problemas de más de un paso. En E. Castro, J. Cázares, E. Castro y J. L. Lupiáñez (Edits.), *Investigaciones en educación matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 343-364). Granada: Universidad de Granada.
- Frías, A. y Castro, E. (2007b). Influencia del Número de Conexiones en la Representación Simbólica de Problemas Aritméticos de Dos Pasos. *PNA, volumen 2 (1)*, 29-41.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias Hipotéticas de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. *PNAI*(2), 79-98.
- Lise, M. (2015). Problemas Aritméticos, Articulación, Significados y Procedimientos de Resolución. *Educación Matemática*, 003, 29-55.
- López, A. (2001). Desarrollo de las operaciones de sumar y restar en la comprensión de los problemas verbales. *Tesis doctoral*. Madrid: Univeridad Complutense.

- Martínez, J. y Aguilar, M. (1996). La categoría semántica de igualación. Rasgos distintivos respecto a las de cambio y comparación. *Suma*(21), 35-39.
- Ministerio de Educación y Ciencia. (8 de Diciembre de 2006). *Boletín Oficial del Estado*. Recuperado el 15 de Mayo de 2015, de www.boe.es/boe/dias/2006/12/08/pdfs/A43053-43102.pdf
- Moreno, M. F. (1998). *Didáctica de la matemática en la educación secundaria*. Almería: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Almería.
- Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. *Number concepts and operations in the middle grades*, 2, 19-40.
- Nesher, P., y HersHKovitz, S. (1994). The role of schemes in two-step problems: research findings. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 1-23.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Rico, L., González, E., Gutiérrez, J., Castro, E., Tortosa, A., Castro, E., Fernández, F., Morcillo, N., Segovia, I. y Pérez, A. (en prensa). Categoría de Problemas Aditivos de Dos Etapas. *Seminario CIEM*. Educación Matemática.
- Robayna, M., Domínguez, J. y Herrera, M. (1998). Clasificación de PAEV aditivos de una etapa con cantidades discretas relativas. *Primer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática: primer encuentro* (pp. 46-62). Zamora: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. SEIEM.
- Shalin, V. L. y Bee, N. (1985). Structural differences between two-step word problems. *Presentado en Meeting of the American Educational Research Association*.
- Simons, H. (2011). *Estudio de caso: teoría y práctica*. Madrid: Ediciones Morata.

- Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata.

Problema 3.

Javier tiene 12 estampas

Laura tiene 3 veces más estampas que Javier

¿Cuántas estampas tienen entre los dos?

Resultado: _____

Problema 4.

Marta tiene 54 puntos y Jesús tiene 108 puntos

Jaime tiene 36 puntos menos que Marta

¿Cuántos puntos tienen entre Jaime y Jesús?

Resultado: _____

Problema 5.

Carmen tiene 72 euros

Daniel tiene 6 veces menos euros que Carmen

¿Cuántos euros tienen entre los dos?

Resultado: _____

Problema 6.

Lucía tiene 15 cromos y Paula tiene 90 cromos

Jorge tiene 30 cromos más que Lucía

¿Cuántos cromos tienen entre Jorge y Paula?

Resultado: _____

Problema 7.

Raúl tiene 108 puntos

Luis tiene 90 puntos menos que Raúl

¿Cuántos puntos tienen entre los dos?

Resultado: _____

Problema 8.

Elena tiene 12 sellos y Fabiola tiene 72 sellos

Alejandro tiene 3 veces más sellos que Elena

¿Cuántos sellos tienen entre Alejandro y Fabiola?

Resultado: _____

Cuestionario 2

Colegio: _____ Nivel: _____ Fecha: _____	
--	--

Apellidos: _____ Nombre: _____ Edad: _____
Problema 1.

Javier tiene 12 estampas

Entre Javier y Laura tienen 48 estampas

¿Cuántas estampas tiene Laura más que Javier?

Resultado: _____

Problema 2.

José tiene 36 euros y David tiene 72 euros

Entre Cristina y David tienen 84 euros

¿Cuántas veces menos euros tiene Cristina que José?

Resultado: _____

Problema 3.

Juan tiene 15 canicas

Entre Juan y Pedro tienen 60 canicas

¿Cuántas veces más canicas tiene Pedro que Juan?

Resultado: _____

Problema 4.

Marta tiene 54 puntos y Jesús tiene 108 puntos

Entre Jaime y Jesús tienen 126 puntos

¿Cuántos puntos tiene Jaime menos que Marta?

Resultado: _____

Problema 5.

Carmen tiene 72 euros

Entre Carmen y Daniel tienen 84 euros

¿Cuántas veces menos euros tiene Daniel que Carmen?

Resultado: _____

Problema 6.

Elena tiene 12 sellos y Fabiola tiene 72 sellos

Entre Alejandro y Fabiola tienen 108 sellos

¿Cuántos sellos tiene Alejandro más que Elena?

Resultado: _____

Problema 7.

Raúl tiene 108 puntos

Entre Luis y Raúl tienen 126 puntos

¿Cuántos puntos tiene Luis menos que Raúl?

Resultado: _____

Problema 8.

Lucía tiene 15 cromos y Paula tiene 90 cromos

Entre Jorge y Paula tienen 135 cromos

¿Cuántas veces más cromos tiene Jorge que Lucía?

Resultado: _____

Cuestionario 3

Colegio: _____ Nivel: _____ Fecha: _____	
--	--

Apellidos: _____ Nombre: _____ Edad: _____
Problema 1.

En un juego, Luis ha conseguido 18 puntos

Raúl ha conseguido 90 puntos más que Luis

¿Cuántas veces más puntos ha conseguido Raúl que Luis?

Resultado: _____

Problema 2.

Alejandro tiene 36 sellos y Fabiola tiene 72 sellos

Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro

¿Cuántos sellos tiene Fabiola más que Elena?

Resultado: _____

Problema 3.

Daniel tiene 12 euros

Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel

¿Cuántos euros tiene Carmen más que Daniel?

Resultado: _____

Problema 4.

Jorge tiene 45 cromos y Paula tiene 90 cromos

Lucía tiene 30 cromos menos que Jorge

¿Cuántas veces más cromos tiene Paula que Lucía?

Resultado: _____

Problema 5.

Laura tiene 36 estampas

Javier tiene 3 veces menos estampas que Laura

¿Cuántas estampas tiene Laura más que Javier?

Resultado: _____

Problema 6.

En un juego Jaime ha conseguido 18 puntos y Jesús ha conseguido 54 puntos

Marta ha conseguido 90 puntos más que Jaime

¿Cuántas veces más puntos ha conseguido Marta que Jesús?

Resultado: _____

Problema 7.

Pedro tiene 45 canicas

Juan tiene 30 canicas menos que Pedro

¿Cuántas veces más canicas tiene Pedro que Juan?

Resultado: _____

Problema 8.

Cristina tiene 12 euros y David tiene 72 euros

José tiene 4 veces más euros que Cristina

¿Cuántos euros tiene David más que José?

Resultado: _____

Cuestionario 4

Colegio: _____ Nivel: _____ Fecha: _____

Apellidos: _____ Nombre: _____ Edad: _____

Problema 1.

En un juego Luis ha conseguido 18 puntos

Raúl ha conseguido 90 puntos más que Luis

¿Cuántas veces menos puntos ha conseguido Luis que Raúl?

Resultado: _____

Problema 2.

Alejandro tiene 36 sellos y Fabiola tiene 72 sellos

Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro

¿Cuántos sellos tiene Elena menos que Fabiola?

Resultado: _____

Problema 3.

Daniel tiene 12 euros

Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel

¿Cuántos euros tiene Daniel menos que Carmen?

Resultado: _____

Problema 4.

Jorge tiene 45 cromos y Paula tiene 90 cromos

Lucía tiene 30 cromos menos que Jorge

¿Cuántas veces menos cromos tiene Lucía que Paula?

Resultado: _____

Problema 5.

Laura tiene 36 estampas

Javier tiene 3 veces menos estampas que Laura

¿Cuántas estampas tiene Javier menos que Laura?

Resultado: _____

Problema 6.

En un juego Jaime ha conseguido 18 puntos y Jesús ha conseguido 54 puntos

Marta ha conseguido 90 puntos más que Jaime

¿Cuántas veces menos puntos ha conseguido Jesús que Marta?

Resultado: _____

Problema 7.

Pedro tiene 45 canicas

Juan tiene 30 canicas menos que Pedro

¿Cuántas veces menos canicas tiene Juan que Pedro?

Resultado: _____

Problema 8.

Cristina tiene 12 euros y David tiene 72 euros

José tiene 4 veces más euros que Cristina

¿Cuántos euros tiene José menos que David?

Resultado: _____

7.2. Tablas de recogida de aciertos y tipos de error por alumno o alumna, curso, grupo, tipo de cuestionario y problema

REGISTROS DE LOS ACIERTOS Y ERRORES:

- 0- PROBLEMA CORRECTO

1- ERROR DE UNA OPERACIÓN

2- ERROR DE CAMBIO DE ESTRUCTURA

3- ERROR DE MEZCLA DE ESTRUCTURA

4- ERROR DE REPETIR EL DATO NO COMPARTIDO
- 5- ERROR DE DATOS ORDENADOS

6- ERROR DE PALABRA CLAVE

7- SIN RESPUESTA O EN BLANCO

8- OTROS

* SIMULTANEIDAD DE ERRORES SE RECOGE EN CADA PROBLEMA SI SE HAN COMETIDO DISTINTOS TIPOS DE ERRORES

GRUPO	Nº ALUMNO	CUESTIONARIO 1								CUESTIONARIO 2								CUESTIONARIO 3								CUESTIONARIO 4									
		1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8		
	22	0	0	0	0	0	0	0	0																										
	7	0	0	0	0	0	0	0	0																										
	D1	0	0	0	0	0	0	0	0																										
	25	0	0	0	0	0	0	0	0																										
	D2	0	3	0	0	7	0	0	0																										
5ºA	8									0	0	0	0	0	0	0	0																		
	4									1	2	1	0	1	2	0	1	2																	
	17									0	8	8	0	8	0	0	8																		
	13									0	0	0	0	0	0	0	0																		
	18									0	0	0	2	0	0	0	0																		
	3									0	2	2	0	2	0	0	2																		
	21																	1	0	1	2	0	2	1	2	0									
	20																	0	0	0	3	0	0	0	0										
	16																	7	0	0	2	0	2	2	0										
	11																	2	0	0	2	0	2	2	0										
	12																	2	2	2	2	2	2	2	2										
	1																	1	2	3	3	2	3	2	7	1	3								
	14																									1	2	2	0	2	2	2	2	0	
	15																									2	0	0	2	0	2	1	2	0	
	27																									0	0	0	0	0	0	0	0		
10																									2	0	0	2	0	2	2	0			
19																									3	7	0	0	3	0	3	7	7	0	
23																									1	2	0	2	0	2	1	2	2		
26																									1	2	1	1	2	1	2	7	1	2	0

GRUPO	Nº ALUMNO	CUESTIONARIO 1								CUESTIONARIO 2								CUESTIONARIO 3								CUESTIONARIO 4								
5ºB	20	0	0	0	0	0	0	0	0																									
	25	1	2	1	2	0	2	6	0	0	2																							
	7	0	3	0	0	0	7	0	0	0	0																							
	13	0	2	2	0	2	0	0	2																									
	12	0	0	0	0	0	0	0	0																									
	11	0	0	0	0	0	0	0	0																									
	17										1	2	1	0	1	0	1	2																
	6										1	2	1	0	1	2	0	1	2															
	1										0	2	6	2	0	2	0	0	2															
	26										0	2	2	0	2	0	0	2																
	14										0	2	2	0	2	0	0	2																
	9																		1	2	2	1	2	1	2	0								
	2																		1	2	0	0	2	0	2	4	1	2	0					
	22																		0	0	0	0	0	0	0	0	7							
	23																		1	0	1	2	0	2	1	0								
	19																		2	0	0	2	0	2	2	0								
	5																		0	0	0	7	1	0	0	0								
	8																										2	0	0	2	0	2	2	0
	7																										0	0	0	0	0	0	0	
	15																										2	3	2	2	1	2	2	1
10																										0	0	0	0	0	0	0	2	
3																										2	0	0	2	0	2	2	0	
21																										2	2	2	2	2	1	2	2	
5ºC	1	0	2	2	0	2	0	0	2																									
	3	0	0	0	0	0	0	0	0																									
	4	0	0	0	0	0	0	0	0																									
	7	1	0	0	0	0	0	0	0																									
	12	0	0	0	0	0	0	0	0																									
	14	0	3	0	0	3	2	0	0																									
	25	0	0	0	0	0	0	0	0																									
	27	0	0	0	0	0	0	0	0																									
	8										1	1	1	0	1	0	1	1																
	11										0	2	2	0	2	0	0	2																
	17										1	2	1	1	1	0	0	2																
	19										1	1	2	1	2	1	1	2	7	1	1													
	22										1	2	2	0	2	0	0	2																
	24										0	2	2	0	8	0	0	8																
	9																		1	5	1	5	1	2	5	1	7							
	10																		2	4	2	2	2	4	2	2	2	2						
	13																		2	2	2	2	2	2	2	2	2							
	20																		0	0	0	0	8	8	0	0								
	21																		1	0	0	1	0	0	0	0								
	26																		2	0	4	6	2	7	4	2	3	7						
2																										1	2	2	2	2	4	2	2	
5																										1	2	0	0	2	0	2	1	
6																										0	4	0	0	0	0	0	0	
15																										1	2	0	7	2	7	0	3	
16																										0	0	0	0	0	0	0	0	
23																										0	0	0	0	0	0	0	2	

GRUPO	Nº ALUMNO	CUESTIONARIO 1								CUESTIONARIO 2								CUESTIONARIO 3								CUESTIONARIO 4									
		1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8		
6ºA	17	1	0	0	0	0	0	0	0																										
	19	0	0	0	0	0	0	0	0																										
	D1	0	0	1	0	0	0	0	0																										
	D2	0	4	0	0	0	0	0	0																										
	D3	1	0	1	0	0	0	0	0																										
	D4	0	0	0	0	0	0	0	0																										
	2									1	2	1	5	1	0	1	2																		
	4									0	2	6	1	0	1	0	1	2																	
	5									1	7	1	2	0	1	2	1	1	1	2															
	18									0	0	0	0	0	0	0	0	0																	
25									0	2	2	0	2	0	0	0	2																		
D5									1	2	1	2	0	1	2	0	1	2																	
13																		0	0	0	0	0	0	0	0										
15																		0	0	0	0	0	0	0	0										
16																		1	2	0	2	2	2	2	8	8									
20																		1	2	0	0	2	1	2	1	2	0								
D6																		1	6	1	2	6	6	5	7	5									
10																										0	0	0	0	0	0	0	0		
14																										3	0	0	2	1	2	1	2	7	
21																										2	0	0	2	0	2	4	1	2	0
D7																										1	2	2	2	2	1	2	1	0	
D8																										0	2	0	0	0	0	0	0	0	
6ºB	4	1	0	0	0	0	0	0	0																										
	7	1	0	0	0	0	0	0	0																										
	22	0	0	0	0	0	0	0	7																										
	1	0	0	2	0	0	0	0	0																										
	9	1	0	0	0	0	0	0	0																										
	25	0	0	0	0	0	0	0	0																										
	11									1	2	2	0	2	0	1	2																		
	20									7	5	7	5	1	5	1	5																		
	12									1	2	2	0	2	0	0	2																		
	10									0	2	2	6	0	2	0	0	2																	
	15									0	2	2	0	2	0	0	2																		
	6									0	2	2	0	2	0	0	2																		
	17																	0	0	0	0	0	0	0	0	0									
	8																	0	0	0	0	0	0	0	0	0									
	21																	0	0	0	2	0	0	2	0	0									
	18																	0	0	0	0	0	0	0	0	0									
	2																	2	0	0	2	0	2	2	0	0									
	5																									1	2	0	0	2	0	2	2	0	
	19																									0	0	0	0	0	0	0	0		
	14																									2	0	0	2	0	2	2	0		
13																									0	0	0	0	0	0	0	0			
16																									1	2	1	0	2	0	2	2	0		

GRUPO	Nº ALUMNO	CUESTIONARIO 1								CUESTIONARIO 2								CUESTIONARIO 3								CUESTIONARIO 4							
6ºC		1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8	1	2	3	4	5	6	7	8
	7	2	0	0	0	0	2	0	0																								
	12	0	0	0	0	0	0	0	0																								
	15	0	0	0	0	0	0	0	0																								
	22	0	0	0	0	7	0	0	0																								
	23	0	0	0	0	0	0	0	0																								
	24	0	0	0	0	0	0	0	0																								
	3									0	3	3	0	3	0	0	3																
	4									0	0	0	0	0	0	0	0																
	11									1	1	1	0	1	0	1	2																
	16									0	2	2	0	2	0	0	2																
	17									1	2	0	1	2	8	2	2	7	1	7													
	19									1	2	2	6	0	1	2	0	0	2														
	1																	1	2	2	2	2	2	2	2	2							
	5																	1	0	0	0	0	0	0	0	0							
	10																	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
	14																	2	2	2	2	2	2	2	2	2							
	13																	1	2	0	1	2	0	2	1	2	0						
	20																	3	0	0	3	0	3	3	0								
25																										2	0	0	2	0	2	2	0
18																										1	1	2	1	2	2	1	2
8																										2	0	0	2	0	2	1	0
6																										2	1	1	1	2	1	2	0
9																										0	0	0	0	0	0	0	0
2																										0	0	0	0	0	0	0	0

7.3. Tablas de frecuencia por tipo de error, cuestionario y problema, total de frecuencia de error por cuestionario y porcentaje

	CUESTIONARIO 1								RESULTADOS	%
PROBLEMA	1	2	3	4	5	6	7	8		
ERROR UO	7	0	3	0	0	0	0	0	10	27,78%
ERROR CE	1	3	4	0	3	2	0	3	16	44,44%
ERROR ME	0	3	0	0	1	0	0	0	4	11,11%
ERROR RDNC	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2,78%
ERROR DOR	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00%
ERROR PC	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2,78%
SIN RESPUESTA	0	0	0	0	3	0	0	1	4	11,11%
ERROR OTROS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00%

	CUESTIONARIO 2								RESULTADOS	%
PROBLEMA	1	2	3	4	5	6	7	8		
ERROR UO	15	3	12	2	13	1	13	3	62	35,23%
ERROR CE	1	23	19	1	20	1	0	23	88	50,00%
ERROR ME	0	1	1	0	1	0	0	1	4	2,27%
ERROR RDNC	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00%
ERROR DOR	0	1	0	2	0	1	0	1	5	2,84%
ERROR PC	0	2	2	0	0	0	0	0	4	2,27%
SIN RESPUESTA	1	1	1	0	0	2	0	1	6	3,41%
ERROR OTROS	0	1	1	1	2	0	0	2	7	3,98%

	CUESTIONARIO 3								RESULTADOS	%
PROBLEMA	1	2	3	4	5	6	7	8		
ERROR UO	13	0	6	1	4	0	8	0	32	26,42%
ERROR CE	15	6	6	20	6	19	16	5	93	56,60%
ERROR ME	1	1	1	2	1	1	1	2	10	4,53%
ERROR RDNC	1	0	1	1	1	1	0	0	5	1,70%
ERROR DOR	0	1	0	1	0	2	0	1	5	1,89%
ERROR PC	0	1	1	1	1	0	0	0	4	1,70%
SIN RESPUESTA	1	0	0	2	0	1	1	3	8	5,09%
ERROR OTROS	0	0	0	0	1	1	1	1	4	2,08%

	CUESTIONARIO 4								RESULTADOS	%
PROBLEMA	1	2	3	4	5	6	7	8		
ERROR UO	8	5	3	5	4	2	8	1	36	31,86%
ERROR CE	12	4	3	13	2	12	10	4	60	53,10%
ERROR ME	1	0	1	0	0	1	0	1	4	3,54%
ERROR RDNC	0	2	0	1	0	1	0	0	4	3,54%
ERROR DOR	0	0	1	0	1	0	0	0	2	1,77%
ERROR PC	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0,88%
SIN RESPUESTA	0	1	1	1	0	1	0	2	6	5,31%
ERROR OTROS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,00%

7.4. Modelo de solicitud de autorización para entrevistas grabadas



UNIVERSIDAD DE ALMERÍA

Estimados padres;

Somos profesores de Didáctica de la Matemática, del departamento de Educación de la Universidad de Almería.

Estamos realizando una investigación sobre resolución de problemas aritméticos en Educación Primaria. Para desarrollar esta investigación necesitamos la colaboración de alumnos de Primaria que estén dispuestos a participar en la experiencia.

Por este motivo nos gustaría saber si ustedes dan el consentimiento para la participación de su hijo/a en dicha experiencia.

Si aceptan, deben saber que sus hijos serán grabados en el desarrollo de entrevistas individuales que se llevarán a cabo durante el presente curso académico.

Las imágenes sólo se utilizarán con fines académicos, preservando siempre el anonimato, y nadie ajeno a la investigación tendrá acceso a ellas.

Si decide que su hijo/a participe en el estudio, por favor, firme el siguiente formulario.

Los abajo firmantes declaramos que:

1. Hemos leído la Hoja de Información y hemos entendido todo lo que pone en ella.
2. Sabemos que podemos decidir no participar en este estudio y que no pasa nada.
3. Sabemos que si decidimos participar, grabarán nuestra entrevista.

Apellidos y nombre del alumno/a	Curso y grupo

Padre/madre/tutor/a	D.N.I.	Firma

Almería, a de de 2015

7.5. Entrevistas semiestructuradas de los participantes

ENTREVISTA: ALUMNA N° 1 DE 5° A. CUESTIONARIO 3- ME

- ¿Te gustan las matemáticas?
 - ¿Por qué?
- ¿Qué te parecieron los problemas que hicisteis el otro día?
 - ¿Fueron fáciles o difíciles?
 - ¿Cuáles fueron difíciles? ¿Por qué?
 - ¿Y fáciles? ¿Por qué?
- A mí me gustaría comentar algunos de ellos. Vamos a empezar por el problema 3. (Necesito que me explique por qué entiende que 3 veces menos es 3×10)
- ¿entiendes el problema?
 - **(SI)** ¿Podrías explicármelo?
 - ¿Qué te está pidiendo?
 - ¿Qué operación/es has hecho para resolverlo?
 - ¿Qué obtienes al realizar esa operación? ¿por qué? ¿y esta otra?
 - ¿Puedes aclararme los datos que te dan y cómo obtienes el resultado?
 - ¿Por qué haces esa operación y no otra?
 - ¿Con esa operación que sabemos?
 - ¿Eso es lo que te piden?
 - ¿Para qué te sirve ese dato que has obtenido?
 - **(NO)** Vamos a leerlo y me gustaría que me dijeras que es lo que no entiendes, ¿vale?
 - ¿Qué entiendes de lo que dice el enunciado del problema?
 - ¿Qué no entiendes?
- ¿Qué significa “Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel”?
 - (Si lo entiende) ¿Eso como se puede calcular?

- ¿Es una resta, una división, una suma o una multiplicación?
¿Por qué?
 - ¿Qué operación has hecho tú? ¿Por qué?
 - (Si no lo sabe.) ¿Qué es lo que no entiendes? ¿Por qué?
 - Además puedo volver sobre las preguntas hechas anteriormente pidiéndole que dibuje la situación.
- Y luego en la pregunta te dice ¿Cuántos euros tienen Carmen más que Daniel? ¿Qué te está pidiendo? ¿Qué quieres decir con eso? ¿Cómo se calcula lo que te está preguntando? ¿Qué datos necesitas para calcularlo? ¿Qué datos has utilizado tú al resolverlo? ¿Por qué?

Vamos a ver el problema nº dos del cuestionario y vemos como lo hiciste y si crees que está bien.

- ¿entiendes el problema?
- **(SI)** ¿Podrías explicármelo?
 - ¿Qué te está pidiendo?
 - ¿Qué operación/es has hecho para resolverlo?
 - ¿Qué obtienes al realizar esa operación? ¿por qué? ¿y esta otra?
 - ¿Puedes aclararme los datos que te dan y cómo obtienes el resultado?
 - ¿Por qué haces esa operación y no otra?
 - ¿Con esa operación que sabemos?
 - ¿Eso es lo que te piden?
 - ¿Para qué te sirve ese dato que has obtenido?
 - **(NO)** Vamos a leerlo y me gustaría que me dijeras que es lo que no entiendes, ¿vale?
 - ¿Qué entiendes de lo que dice el enunciado del problema?
 - ¿Qué no entiendes?
- ¿Qué significa “Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro”?
- (Si lo entiende) ¿Eso como se puede calcular?

- ¿Es una resta, una división, una suma o una multiplicación?
¿Por qué?
 - ¿Qué operación has hecho tú? ¿Por qué?
 - (Si no lo sabe.) ¿Qué es lo que no entiendes? ¿Por qué?
 - Además puedo volver sobre las preguntas hechas anteriormente pidiéndole que dibuje la situación.
- Y luego en la pregunta te dice ¿Cuántos sellos tiene Fabiola más que Elena? ¿Qué te está pidiendo? ¿Qué quieres decir con eso? ¿Cómo se calcula lo que te está preguntando? ¿Qué datos necesitas para calcularlo? ¿Qué datos has utilizado tú al resolverlo? ¿Por qué?

Bueno, ahora me gustaría comentarte que cuando se dice Tú tienes dos veces más que yo, eso es lo mismo que decir tú tiene el doble que yo. Entonces si yo tengo 2 cromos, tú tienes 4 que es dos veces más o el doble. Si yo tengo 5 entonces tú tienes 10. O si yo tengo tres veces más que tú quiere decir que si tú tienes 5 cromos yo tengo $3 \times 5 = 15$ cromos. ¿Lo entiendes ahora?

Ahora para terminar vamos a ver cómo harías un par de problemas:

Cuestionario 3 - Problema 5

Laura tiene 36 estampas.

Javier tiene 3 veces menos estampas que Laura.

¿Cuántas estampas tiene Laura más que Javier?

Solución: _____

Cuestionario 3- Problema 8

Cristina tiene 12 euros y David tiene 72 euros.

José tiene 4 veces menos euros que Cristina.

¿Cuántos euros tiene David más que José?

Solución: _____

ENTREVISTA: ALUMNA N°3 DE 6º C. CUESTIONARIO 2- ME (2,3, 5 y 8).

- ¿Te gustan las matemáticas?
 - ¿Por qué?
- ¿Qué te parecieron los problemas que hicisteis el otro día?
 - ¿Fueron fáciles o difíciles?
 - ¿Cuáles fueron difíciles? ¿Por qué?
 - ¿Y fáciles? ¿Por qué?
- Bueno, ahora me gustaría que comentáramos uno de los problemas de los que hiciste.
- Vamos al problema n° 2 ¿entiendes el problema?
 - **(SI)** ¿Podrías explicármelo?
 - ¿Qué te está pidiendo?
 - ¿Qué operación/es has hecho para resolverlo?
 - ¿Qué obtienes al realizar esa operación? ¿por qué? ¿y esta otra?
 - ¿Puedes aclararme los datos que te dan y cómo obtienes el resultado?
 - ¿Por qué haces esa operación y no otra?
 - ¿Con esa operación que sabemos?
 - ¿Eso es lo que te piden?
 - ¿Para qué te sirve ese dato que has obtenido?
 - **(NO)** Vamos a leerlo y me gustaría que me dijeras que es lo que no entiendes, ¿vale?
 - ¿Qué entiendes de lo que dice el enunciado del problema?
 - ¿Qué no entiendes?
- ¿Qué significa “cuántas veces menos euros tiene Cristina que José”?
 - (Si lo entiende) ¿Eso como se puede calcular?
 - ¿Es una resta, una división, una suma o una multiplicación? ¿Por qué?

- ¿Qué operación has hecho tú? ¿Por qué?
 - (Si no lo sabe.) ¿Qué es lo que no entiendes? ¿Por qué?
 - Además puedo volver sobre las preguntas hechas anteriormente pidiéndole que dibuje la situación.
- Para continuar, ahora me gustaría proponerte algunos problemas.
(Si hace bien el problema 3 del cuestionario 3 le propongo hacer el problema 4 del cuestionario 3 y a continuación los problemas 2 y 1 del cuestionario 4)

Cuestionario 3 - Problema 3

Daniel tiene 12 euros.

Carmen tiene 6 veces más euros que Daniel.

¿Cuántos euros tiene Carmen más que Daniel?

Solución: _____

Cuestionario 3- Problema 4

Jorge tiene 45 cromos y Paula tiene 90 cromos.

Lucía tiene 30 cromos menos que Jorfe.

¿Cuántas veces más cromos tiene Paula que Lucía?

Solución:_____

Cuestionario 4 - Problema 2

Alejandro tiene 36 sellos y Fabiola tiene 72 sellos.

Elena tiene 3 veces menos sellos que Alejandro.

¿Cuántos sellos tiene Elena menos que Fabiola?

Solución:_____

Cuestionario 4- Problema 1

En un juego Luis ha conseguido 18 puntos.

Raúl ha conseguido 90 puntos más que Luis.

¿Cuántas veces menos puntos ha conseguido Luis que Raúl?

Solución: _____

ENTREVISTA: ALUMNO N°20 DE 6º C. CUESTIONARIO 3- ME (1, 4, 6 y 7).

- ¿Te gustan las matemáticas?
 - ¿Por qué?
- ¿Qué te parecieron los problemas que hicisteis el otro día?
 - ¿Fueron fáciles o difíciles?
 - ¿Cuáles fueron difíciles? ¿Por qué?
 - ¿Y fáciles? ¿Por qué?
- Bueno, ahora me gustaría que comentáramos algunos de los problemas que hiciste.
- Vamos al problema n° 1 ¿entiendes el problema?
 - **(SI)** ¿Podrías explicármelo?
 - ¿Qué te está pidiendo?
 - ¿Qué operación/es has hecho para resolverlo?
 - ¿Qué obtienes al realizar esa operación? ¿por qué? ¿y esta otra?
 - ¿Puedes aclararme los datos que te dan y cómo obtienes el resultado?
 - ¿Por qué haces esa operación y no otra?
 - ¿Con esa operación que sabemos?
 - ¿Eso es lo que te piden?
 - ¿Para qué te sirve ese dato que has obtenido?
 - **(NO)** Vamos a leerlo y me gustaría que me dijeras que es lo que no entiendes, ¿vale?
 - ¿Qué entiendes de lo que dice el enunciado del problema?
 - ¿Qué no entiendes?
- ¿Qué significa “cuántas veces más puntos ha conseguido Raúl que Luis”?
 - (Si lo entiende) ¿Eso como se puede calcular?

- ¿Es una resta, una división, una suma o una multiplicación?
¿Por qué?
 - ¿Qué operación has hecho tú? ¿Por qué?
 - (Si no lo sabe.) ¿Qué es lo que no entiendes? ¿Por qué?
 - Además puedo volver sobre las preguntas hechas anteriormente pidiéndole que dibuje la situación.
- Vamos ahora al problema nº 4 ¿entiendes el problema?
- **(SI)** ¿Podrías explicármelo?
 - ¿Qué te está pidiendo?
 - ¿Qué operación/es has hecho para resolverlo?
 - ¿Qué obtienes al realizar esa operación? ¿por qué? ¿y esta otra?
 - ¿Puedes aclararme los datos que te dan y cómo obtienes el resultado?
 - ¿Por qué haces esa operación y no otra?
 - ¿Con esa operación que sabemos?
 - ¿Eso es lo que te piden?
 - ¿Para qué te sirve ese dato que has obtenido?
 - **(NO)** Vamos a leerlo y me gustaría que me dijeras que es lo que no entiendes, ¿vale?
 - ¿Qué entiendes de lo que dice el enunciado del problema?
 - ¿Qué no entiendes?
- ¿Qué significa “cuántas veces más cromos tiene Paula que Lucía”?
- (Si lo entiende) ¿Eso como se puede calcular?
 - ¿Es una resta, una división, una suma o una multiplicación?
¿Por qué?
 - ¿Qué operación has hecho tú? ¿Por qué?
 - (Si no lo sabe.) ¿Qué es lo que no entiendes? ¿Por qué?
 - Además puedo volver sobre las preguntas hechas anteriormente pidiéndole que dibuje la situación.

7.6. Entrevistas semiestructuradas al docente

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURA AL DOCENTE

Buenos días,

¿Qué tal? Me gustaría hablar un poco sobre algunos de los alumnos a los que se entrevistó en días pasados.

Podemos comenzar por la alumna nº 3 de 6º C.

- ¿Cómo es esta alumna?
- ¿Cómo va en la escuela?
- ¿Cómo ha sido su evolución en el curso?
- ¿Conoces su trayectoria en la escuela?
- ¿Me la puedes contar?
- ¿Se interesa por sus estudios?
- ¿Cómo es su actitud en clase?
- ¿Y la relación con sus compañeros?

- Y en el área de Matemáticas, ¿cómo se le da la materia?
- ¿Cómo ha sido su evolución durante el curso en la asignatura?
- Y su trayectoria anterior en matemáticas, ¿la conoces? ¿Me la podrías contar?

- Ahora me gustaría mostrarte un problema de los que resolvió cuando pasamos los cuestionarios en clase por si me puedes orientar sobre lo que hizo en la resolución de algún problema. Vamos a ver el problema nº 2.

En el problema ella hace varias operaciones 84-72 y con eso parece que obtiene los euros que tiene Cristina y luego divide 36 euros de José entre los 12 que ha obtenido que tiene Cristina y con eso obtiene las veces

menos que tiene Cristina que José, pero luego hace $36-12$ y lo que le da que es 24 lo divide entre 12 de nuevo. No entiendo muy bien que está haciendo. ¿Me podrías ayudar a entenderlo?

- Para terminar me gustaría se es posible tener acceso a sus calificaciones de la materia de este año y a su cuaderno de actividades de matemáticas de este curso. ¿Sería posible?

Buenos días,

¿Qué tal? Me gustaría hablar un poco sobre algunos de los alumnos a los que se entrevistó en días pasados.

Podemos comenzar por el alumno nº 20 de 6º C.

- ¿Cómo es este alumno?
- ¿Cómo va en la escuela?
- ¿Cómo ha sido su evolución en el curso?
- ¿Conoces su trayectoria en la escuela?
- ¿Me la puedes contar?
- ¿Se interesa por sus estudios?
- ¿Cómo es su actitud en clase?
- ¿Y la relación con sus compañeros?

- Y en el área de Matemáticas, ¿cómo se le da la materia?
- ¿Cómo ha sido su evolución durante el curso en la asignatura?
- Y su trayectoria anterior en matemáticas, ¿la conoces? ¿Me la podrías contar?

- Ahora me gustaría mostrarte un problema de los que resolvió cuando pasamos los cuestionarios en clase por si me puedes orientar sobre lo que hizo en la resolución de algún problema. Vamos a ver el problema nº 1.

En el problema él hace varias operaciones $90-18$ y con eso parece que obtiene los euros que tiene Luis. Luego divide los 90 que ha conseguido Raúl más que Luís y los divide entre los 18 puntos que ha conseguido Luís y obtiene 5. Tras ello multiplica 18 por 5 y finalmente divide 108 entre 18 que da 6. Sin embargo el resultado que da es que Raúl ha conseguido 5 veces más puntos que Luís. No entiendo muy bien que está haciendo. ¿Me podrías ayudar a entenderlo?

Ahora podríamos ver el problema nº 4. Aquí hace $45 - 30$ para calcular los cromos que tiene Lucía. Luego hace $30 + 15$ y le da 45. Después hace $90 - 15$ y le da 75. La última operación que hace es 15×5 que le da 75. Entonces dice que el resultado es Paula tiene 5 veces más cromos que Lucía. Me pasa igual, que no entiendo muy bien lo que ha querido hacer. ¿Me podrías ayudar a entenderlo?

- Para terminar me gustaría se es posible tener acceso a sus calificaciones de la materia de este año y a su cuaderno de actividades de matemáticas de este curso. ¿Sería posible?

Buenos días,

¿Qué tal? Me gustaría hablar un poco sobre algunos de los alumnos a los que se entrevistó en días pasados.

Podemos comenzar por la alumna nº 1 de 5º A.

- ¿Cómo es esta alumna?
- ¿Cómo va en la escuela?
- ¿Cómo ha sido su evolución en el curso?
- ¿Conoces su trayectoria en la escuela?
- ¿Me la puedes contar?
- ¿Se interesa por sus estudios?
- ¿Cómo es su actitud en clase?
- ¿Y la relación con sus compañeros?

- Y en el área de Matemáticas, ¿cómo se le da la materia?
- ¿Cómo ha sido su evolución durante el curso en la asignatura?
- Y su trayectoria anterior en matemáticas, ¿la conoces? ¿Me la podrías contar?

- Ahora me gustaría mostrarte un problema de los que resolvió cuando pasamos los cuestionarios en clase por si me puedes orientar sobre lo que hizo en la resolución de algún problema. Vamos a ver el problema nº 3.

En el problema ella hace varias operaciones $6 \text{ veces} = 6 \times 10 = 60$ y luego hace $60 - 12 = 48$ y dice que el resultado es que Carmen tiene 48 euros más que Daniel. No entiendo muy bien que ha hecho. ¿Me podrías ayudar a entenderlo?

- Igualmente me pasa en el problema nº 2. Hace varias operaciones $3 \text{ veces} = 10 \times 3 = 30$. Luego hace 36 sellos de Alejandro menos el 30 que acaba de

calcular y obtiene 6. Después hace 72 sellos de Fabiola menos el 6 que acaba de obtener de la operación anterior y le da 66. Entonces responde el problema diciendo que Fabiola tiene 66 sellos más que Elena. Tampoco entiendo muy bien lo que hace. ¿Me podrías ayudar para saber que ha hecho?

- Para terminar me gustaría si es posible tener acceso a sus calificaciones de la materia de este año y a su cuaderno de actividades de matemáticas de este curso. ¿Sería posible?